Leidraad licht dit nader toe en bepaalt, dat men bij meerdere soorten van aandeelen, de diverse soorten op verschillende bedragen moet waardeeren. Of de aandeelen een gelijke nominale waarde hebben, doet er verder niet toe.

Tot slot nog de volgende opmerkingen:

Of men nu in een bepaald geval tot liquidatie moet overgaan of niet, hangt van de bijzonderheden van het geval af. Ondanks alle voordeelen zal men bij vennootschappen met belangrijke overgangsreserves moeten beginnen met een belangrijk bedrag aan winstbelasting te betalen, een bedrag, dat in het geval, dat de overgangsreserves het bedrijf voor een groot gedeelte financieren, niet altijd gemakkelijk zal zijn vrij te maken. Vooral bij sterk ontwikkelde familievennootschappen zal dit een groot bezwaar zijn.

Daarnaast dan nog de moeilijkheden van het samenstellen van een firma-contract, moeilijkheden, die in heel veel gevallen de lust tot liquidatie zullen bekoelen. In elk geval zal het raadzaam zijn, alvorens het besluit tot ontbinding te nemen, de firmaovereenkomst definitief tot stand te brengen, zoodat men later niet voor verrassingen zal komen te staan.

KOSTENVERLOOP EN DIFFERENTIEELE CALCULATIE

door Dr. S. Kleerekoper

Het kan van algemeene bekendheid worden geacht, dat de differentieele calculatie als regel wordt gemotiveerd met een beroep op een degressief totaal-kostenverloop, hetwelk dan weer wordt verklaard met het optreden van constante kosten.

Wij willen in onderstaande analyse iets nader op deze materie ingaan ten einde te onderzoeken of hier wellicht misverstanden aanwezig zijn, die opheldering behoeven.

Wanneer de totale kostprijs van een hoeveelheid product van P producteenheden wordt voorgesteld door Π geldeenheden en wanneer de toegevoegde kosten van een hoeveelheid van $\triangle P$ producteenheden worden voorgesteld door $\triangle \Pi$ geldeenheden dan wordt de breuk $\frac{\triangle \Pi}{\triangle P}$ de differentieele kosten bij een productie P genoemd. Men merke op, dat deze differentieele kosten zelf weer een gemiddelden kostprijs voorstellen en wel den gemiddelden kostprijs van een zekere kleine hoeveelheid product van $\triangle P$ eenheden als er reeds eerder P eenheden geproduceerd zijn. Men is natuurlijk ook vrij om $\triangle P$ groot te nemen: zoowel de economische als de wiskundige analyse echter hebben hun grootste beteekenis als men $\triangle P$ ten opzichte van P als een kleine grootheid aanneemt.

De integrale calculatie zou den kostprijs van de toegevoegde $\triangle P$ eenheden berekenen met behulp van de breuk $\frac{\Pi + \triangle \Pi}{P + \triangle P}$. Differentieele en integrale kostprijzen zijn dus beide gemiddelden. Het verschil tusschen de differentieele en integrale calculatie is, dat de eerste den gemiddelden kostprijs van een zekere, aan een oorspronkelijke productie *toegevoegde,* hoeveelheid product geeft en de laatste den gemiddelden kostprijs van de *geheele* productie.

Nu heeft het onderscheiden van deze twee rekenwijzen alleen dan zin wanneer

$$\frac{\triangle \Pi}{\triangle P} \lessgtr \frac{\Pi + \triangle \Pi}{P + \triangle P}$$

m.a.w. wanneer de twee rekenwijzen tot verschillende uitkomsten leiden.

Gemakkelijk kan men bewijzen dat wanneer

$$\frac{\triangle \Pi}{\triangle P} = \frac{\Pi + \triangle \Pi}{P + \triangle P}$$

alle kosten recht evenredig zijn met de productie en dat er mitsdien dan ook geen constante kosten voorkomen. (Aanteekening 1). Omgekeerd zullen wij nog opmerken (en in de aanteekeningen aantoonen, zie aanteekening V) dat, wanneer de kosten niet recht evenredig met de productie toenemen, er enkele speciale (critische) punten bestaan waar deze gelijkheid ook geldt. Voorloopig laten wij deze questie rusten en bespreken den toestand, dat, niet op een enkel critisch punt, maar steeds geldt: differentieele kostprijs = integrale kostprijs en dit is voor recht evenredige variabele kosten, zonder dat er constante kosten optreden, het geval.

Gaan wij — om ruimte te sparen zonder nadere motiveering — uit van de veronderstelling, dat de integrale calculatie de „normale" is dan kunnen wij dus zeggen, dat de differentieele calculatie uitgaat van één der 3 volgende veronderstellingen.

1. De variabele kosten zijn evenredig met de productie. Bovendien treden er constante kosten op.
2. De variabele kosten zijn niet evenredig met de productie. Er treden geen constante kosten op.
3. De variabele kosten zijn niet evenredig met de productie en er treden tevens constante kosten op.

Immers alleen in deze gevallen geven de twee rekenwijzen verschillende uitkomsten en in de gevallen dat zij gelijke uitkomsten opleveren heeft de differentiëele calculatie geen zin.

Het is in hooge mate te betreuren, dat men zich in de literatuur nooit rekenschap heeft gegeven van deze hypothesen ,die aan de differentieele calculatie ten grondslag liggen. Dit moest onvermijdelijk ten gevolge hebben, dat het inzicht in de beteekenis van de onderhavige rekenwijze werd vertroebeld en dat allerlei onverantwoorde conclusies en ongerijmdheden zijn binnengeslopen.

Bovendien heeft het niet onderkennen van de beteekenis van onze drie hypothesen het nog in de hand gewerkt, dat men met een zekere luchthartigheid over het begrip niet evenredige kostentoename (de z.g. progressieve en degressieve kosten) is heen gegleden en dat men zelfs het begrip constante kosten bijna nergens goed gedefinieerd vindt. Zoo geven b.v. de geheele Angel-Saksische literatuur, op zeer weinig uitzonderingen na alle Duitsche en een belangrijk deel van de Nederlandsche vakwerken onvoldoende omschrijvingen van hetgeen onder constante kosten moet worden verstaan.

Wij vinden b.v. in het hoogst belangrijke werk van *J. M. Clark*, de volgende definities:

> „They (de overhead costs, S. K.) refer to costs that cannot be „traced home and attributed to particular units of business in the

„same direct and obvious way in which, for example, leather can „be traced to the shoes that are made from it. [1])

Kennelijk heeft de auteur hiermede bedoeld om het begrip indirecte kosten te omschrijven.

Hij merkt dan verder op, „that an increase or decrease in output does not involve a proportionate increase or decrease in cost" en is hiermede gekomen tot iets dat in de Duitsche literatuur als degressieve en progressieve kosten zijn intrede gedaan heeft.

De auteur merkt dan verder in vrij vage bewoordingen op dat het verbijzonderen van deze kosten op groote moeilijkheden stuit, in het bijzonder ook het ontdekken van „the true added costs of added business", waarmede (wij zijn nog steeds op pag. 1) zonder eenige nadere motiveering de differentieeele calculatie is geïntroduceerd. *Clark* gaat dan verder en ontdekt de moeilijkheid, die tot bijna de geheele problematiek aanleiding geeft:

„..... at the bottom of most of these complexities lies a fact that „is simple. That fact is unused productive capacity, or capacity of „which full advantage is not taken. „Idle overhead", that great „industrial sin, is simply the expense side of this unused capacity. Our study of overhead costs will be largely a study of unused „powers of production." [2])

Als wij dus de eerste bepaling: „overhead costs = indirecte kosten" aanhouden, dan lezen wij in dezen laatsten zin: „onze studie van indirecte kosten zal grootendeels een studie van ongebruikte productieve krachten zijn" en hiermede zijn dus de problemen van de indirecte kosten en van de constante kosten grootendeels geïdentificeerd. Dat *Clark* dit heeft bereikt door het geleidelijk bijboetseeren van het oorspronkelijk begrip indirecte kosten op de manier zooals wij hierboven gezien hebben, bevestigt ons nog extra dat zijn kostenideeën inderdaad vaag zijn. Dat hij later [3]) nog een reeks van beteekenissen geeft, waarin de uitdrukkingen variabele en constante kosten kunnen worden gebruikt en dat hij dan ook nog „fixed charges" [4]) onderscheidt, maakt deze vaagheid niet minder maar juist belangrijk grooter. Overigens is in het bijzonder *Clark* hier geciteerd omdat juist hij zulk een belangrijk schrijver over dit onderwerp is. Wij moeten erkennen, dat deze zelfde verwarring in de geheele Engelsche en Amerikaansche literatuur optreedt.

In de Duitse literatuur treffen wij een soortgelijke verwarring aan. Men identificeert hier weliswaar niet de begrippen constante en indirecte kosten maar schijnt te denken dat kostendegressie verklaard moet worden uit het optreden van constante kosten. Nu is het zeker waar, dat het optreden van constante kosten bij toenemende productie tot dalende kosten *per eenheid product kan* leiden.

Hieruit volgt echter geenszins, dat in dit geval ook de *totale kosten* degressief zullen zijn en evenmin dat omgekeerd het optreden van degressieve kosten steeds verklaard zal kunnen worden uit het aanwezig zijn van constante kosten.

---

[1]) Studies in the economics of overhead costs, door *J. M. Clark*, Chicago 1923. pag. 1.
[2]) t.a.p. pag. 1.
[3]) t.a.p. pag. 51 e.v.
[4]) t.a.p. pag. 46.

Schmalenbach schijnt er zoo van overtuigd te zijn, dat dit wel het geval is, dat hij meent, dat alle degressieve kosten-complexen principieel in een „fix" en „proportional" deel kunnen worden gesplitst.

Weliswaar zegt *Schmalenbach* dat deze splitsing in de practijk wegens gebrek aan gegevens dikwijls niet uitvoerbaar is, maar dit doet aan het principieele standpunt niets af, des te minder omdat hij een theoretisch voorbeeld uitwerkt, dat ons „Richtlinien für das praktische Vorgehen" geeft.[5])

Wij citeeren:

„Gesetzt die Kraftkosten betragen

bei 10 000 Stück Erzeugung 1000 M.
bei 12 000 „ „ 1080 M.

„so wären das degressive Kosten; sie steigen mit der Produktions-
„menge, aber sie steigen nicht in entsprechende Masse. Würde
„man die Kosten mathematisch in fixe und proportionale auflösen,
„so wäre zu rechnen:

„Die letzten 2000 Stück Erzeugung haben ein Mehr an Kraft-
„kosten von 80 M, per Stück Erzeugung also von 4 Pf., zur Folge.
„Mithin ist mit einer praktisch unerheblichen Ungenauigkeit der
„Schluss zulässig, dass bei einem Produktionsstande von 11000
„Stück an Kraftkosten erforderlich sind:

11000 à 4 = 440 M an proportionalen
und ausserdem 600 „ an fixen
zusammen 1040 M.

„Bei einer momallichen Produktion von	proportional	fix	zusammen à 4 Pf.
10000 Stück	400	600	1000
11000 „	440	600	1040
12000 „	480	600	1080

„Der fixe Bestandteil bleibt mit 600 M absolut fest, der propor-
„tionale Bestandteil bleibt mit 4 Pf. relativ fest." [5])

Een dergelijke opvatting vinden wij in het bekende Nederlandsche boek over kostprijsberekening van *K. G. Simon — A. E. C. v. Saarloos* waar zelfs expliciet gezegd wordt, dat de kosten „te splitsen zijn in een constant gedeelte en een gedeelte dat evenredig is met de productie." Laat *Schmalenbach* wellicht nog half en half de mogelijkheid open dat dit alles slechts een rekenwijze voorstelt, die niets zegt omtrent het werkelijke karakter der kosten, *Simon* gaat zoover dat hij alle werkelijke kosten als splitsbaar in een constant en evenredig deel stelt. [6])

Omdat wij reeds vroeger [7]) het volstrekt onjuiste van deze opvattingen uitvoerig hebben aangetoond, meenen wij er hier mede te kunnen volstaan om met een enkel voorbeeld iets van het verband tusschen de totale kosten en constante kosten te demonstreeren

Wij willen n.l. aan de hand van een cijfervoorbeeld onderzoeken welken

---

[5]) Der Kontenrahmen, door *E. Schmalenbach*, 4e druk, Leipzig 1935, pag. 9.

[6]) Overigens kan ook een signifische behandeling van de uitdrukking „fix bestand-deel" de opvatting van *Schmalenbach* niet redden. Men zie hierover *Stackelberg*, Grundlagen einer reinen Kostentheorie, Weenen 1932, pag. 117 e.v.

[7]) Over het gebruik van de wiskunde in de economie, Groningen/Batavia 1938, pag. 82 e.v.

invloed het optreden van constante kosten op een eventueele kostendegressie uitoefent.

Stellen wij hiertoe de constante kosten $\Gamma = f\ 1000.—$ en de evenredige kosten $f\ 2$ per eenheid product. Laat verder P varieeren van 100 tot 1000 eenheden en stellen wij de totale kosten voor door Π dan is

$$\Pi = 2P + 1000$$

en stellen wij de gemiddelde integrale kosten voor door π dan is

$$\pi = 2 + \frac{1000}{P}$$

Het volgende staatje kan nu eenvoudig nagerekend worden.

P	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	2000
Π	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	5000
π	12	7	$5^1/_3$	$4^1/_2$	4	$3^2/_3$	$3^3/_7$	$3^1/_4$	$3^1/_9$	3	$2^1/_2$

Het blijkt dat Π inderdaad bestaat uit een constant en evenredig deel n.l. het constante deel 1000 en het evenredige 2P maar zelf *volstrekt niet degressief is* (zooals ook een eenvoudig graphiekje zal leeren). Daarentegen is π dalend en wel degressief dalend. (Wiskundig uitgedrukt: π nadert assymptotisch de lijn $v = 2$). (Aanteekening II)

Uit het proportioneele karakter van Π volgt het constant zijn van de differentieele kosten $v = 2$.

Wij concludeeren:

Degressieve totaal-kosten zijn niet opgebouwd uit een constant en een proportioneel variabel deel. Bestaan omgekeerd de totale kosten uit een constant en een proportioneel variabel deel dan zijn deze totale kosten niet degressief maar boven het constante deel evenredig met P. In het algemeen bestaan de degressieve totaalkosten uit een constant deel (OA) en een degressief variabel deel (zie fig. 1), waarbij dan de degressie niet veroorzaakt wordt door het constante maar juist door het variabele deel.

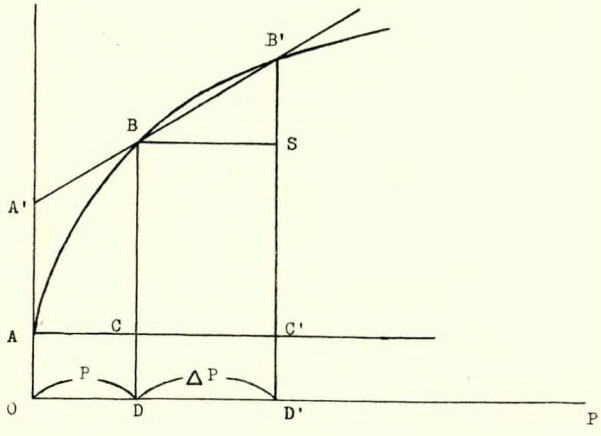


Fig. 1. (De curve ABB' stelt het verloop van de totale kosten voor.)

Dit is het geval dat *Clark* klaarblijkelijk voor oogen staat [8]) Hiermede heeft hij het probleem beter benaderd dan *Schmalenbach* en zijn school.

Er is nu een vraagstuk ontstaan dat veel dieper gaat dan men ergens in de literatuur aantreft.

Een kostencurve zooals wij in fig. 1 aantreffen, kan o.a. tot twee principieel verschillende soorten differentieele calculatie aanleiding geven en wel:

A. Men kan bij de calculatie het stuk O A d.w.z. de constante kosten geheel of gedeeltelijk abandonneeren. Voor de variabele kosten (de curve A B B′) rekent men per eenheid een vast bedrag, v (n.l. een gemiddelde uitgaande van een zekere stamproductie). Men verklaart dus deze variabele kosten ten onrechte proportioneel. (Deze laatste hypothese ligt tevens — te recht of ten onrechte, dit blijve hier in het midden — ten grondslag aan alle technieken van het verbijzonderen van de variabele indirecte kosten, die met vaste opslagpercentages e.d. werken.)

   Bij deze methode heeft de differentieele calculatie dus betrekking op de constante kosten. Men gaat hier klaarblijkelijk uit van een stamproductie van P = o.

B. Men kan het variabele stuk B B′ differentieel calculeeren d.w.z. men gaat uit van een stamproductie P in fig. 1 voorgesteld door O D en deelt dan de variabele kosten van de toegevoegde productie D D′ door het aantal eenheden van deze toegevoegde productie.

   In fig. 1 zijn de toegevoegde kosten van $\triangle P$ of van D D′ voorgesteld door het stukje S B′ en de differentieele kosten per *toegevoegde* eenheid van P zijn dus $\frac{S\ B'}{S\ B}$. In dat geval zijn dus de constante kosten O A niet geabandonneerd.

Een derde mogelijkheid is nog dat men geval 1 en 2 combineert en zoowel ten aanzien van de constante als van de degressief variabele kosten differentieel calculeert.

Het behoeft geen betoog dat deze analyse dringend om normatieve conclusies vraagt; immers de vraag naar de keuze uit deze 3 mogelijkheden kan op straffe van het vervallen in een bedenkelijk opportunisme niet onbeantwoord blijven. Omdat wij in dit artikel slechts de resultaten van een *formeel* wiskundig onderzoek willen publiceeren, stellen wij de beantwoording van deze vraag tot later uit.

Dat het formeel wiskundig onderzoek ons tot onafwijsbare problemen leidt, die de niet mathematische literatuur over het hoofd heeft gezien, is op zichzelf belangrijk genoeg.

Wij beperken ons dus tot de volgende kantteekeningen:

a. Geval B kan bij een juist gekozen stamproductie P en bij het optreden van gescheiden markten tot een aanvaardbare prijsdiscriminatie op integralen grondslag leiden.

   Is n.l. P op grondslag van een budget behoorlijk vastgesteld (b.v.

---

[8]) Men zie de tabel t.a.p. pag. 185.

ter grootte van O D) en zijn de kosten van deze P ook integraal gecalculeerd aldus

$$\Pi = B\ D$$

en

$$\pi = \frac{B\ D}{O\ D}$$

dan kan een toegevoegde hoeveelheid D D′ op grondslag van den kostprijs

$$\Pi = B'\ S$$

en

$$\pi = \frac{B'\ S}{D\ D'}$$

worden aangeboden. (Men denke er aan dat de curve A B B′ het verloop van de *totale* kosten vooorstelt.) Kennelijk worden hier alle kosten, constante zoowel als variabele, in rekening gebracht. In dit opzicht komt men tot het rekenen met een integralen kostprijs in dien zin, dat men alle kosten volledig in rekening stelt, ofschoon de aanbiedingsprijzen, die zoodoende per eenheid product ontstaan, onderling niet gelijk zijn. Wij hebben dus hier niet met een differentieele calculatie in den echten zin van het woord te doen doch met hetgeen men soms noemt: prijsdiscriminatie op integralen grondslag.

b. Het bedrag voor constante kosten, dat *Schmalenbach* vindt bij degressief Π verloop, is steeds te groot.

Er zijn twee mogelijkheden:

1. Er zijn in werkelijkheid in het geheel geen constante kosten (b.v. $\Pi = \sqrt{P}$). *Schmalenbach* splitst dan Π toch in een proportioneel en fix deel. Dit laatste is dan natuurlijk te groot.
2. Wij hebben een geval als in fig. 1. Op de curve A B B′ wordt dan het boven geciteerde splitsingsproces toegepast, waarbij dan de lijn A′ B B′ een aangenomen proportioneel verloop voorstelt en mitsdien de aangenomen constante kosten worden voorgesteld door het stuk O A′; klaarblijkelijk een te groot stuk. Alleen wanneer men voor één der grootten van P de waarde 0 stelt, vindt men het juiste bedrag der constante kosten. Dit is echter iets wat *Schmalenbach* principieel niet wil. Hij houdt deze berekening n.l. voor onuitvoerbaar. (Men zie het boven geciteerde.)

Wanneer dus de z.g. proportionaler Satz werkelijk tot de basis van een aanbiedingsprijs wordt gemaakt, is een absoluut prijsbederf — een abandonneeren van meer dan de constante kosten — te verwachten.

Weliswaar merkt *Schmalenbach* op:

> „Ergibt sich im Laufe der Zeit, dass die tatsachlichen Kraftkosten „stark über oder unter den veranschlagten Sätzen liegen, so ist der „Saldo als Mehr- oder Minderverbrauch abzusetzen, und, nach „erneuter Prüfung, der angenommene Kostensatz von 4 Pf. bzw. „60 cM zu ändern." [9])

doch dit maakt de zaak geenszins beter. Bij voorbaat worden verschillen op rekening van veranderingen in de bedrijfsdrukte geschreven; aan een

[9]) t.a.p. pag. 10.

fout in de calculatiemethode wordt niet gedacht. De opmerking van den schrijver:

„Aber diese Methode, so sehr sie den innern Zusammenhang „deutlich macht, hat häufig Mangel [10])

is, wat de laatste drie woorden aangaat, voor geen betwisting vatbaar.

Wat den innerlijken samenhang aangaat, zouden wij willen zeggen dat het inzicht in deze materie door geen beschouwing zoo wordt verdoezeld als juist door de hier gecritiseerde .

Gaan wij nu eens na wat de oorzaak van de kostendegressie of progressie, waarbij op de totale kosten (Π) gedoeld wordt, kan zijn. Het treft ons, dat in dit verband in de literatuur nooit voldoende gezegd wordt over de systematische plaats van de krachten, die in de organisatie werken en die de efficiency doen verbeteren. Een behoorlijke afscheiding van deze problemen van die van de theorie van den kostprijs wordt steevast verwaarloosd. De eenige opmerking, die dienaangaande in de literatuur voorkomt, is, dat de constante kosten bij toenemende productie den kostprijs per eenheid doen dalen of de hierboven gecritiseerde met betrekking tot de totale kosten. Zelfs gaat men zoover om de uitdrukkingen increasing costs en diminishing returns resp. decreasing costs en increasing returns te identificeeren [11]). De verwarring, die hierin schuilt, is de volgende: verbeteringen in de organisatie doen den kostprijs dalen, omgekeerd behoeven degressieve kosten niet altijd uit verbetering in de organisatie voort te komen. Zoo vormen dalende prijzen (b.v. van grondstoffen) bij uitbreidende productie een hoofdstuk op zichzelf, dat met organisatievraagstukken slechts in een ver verwijderd verband gebracht kan worden.

Grondige analyse zou eischen dat men de wisselwerkingen tusschen decreasing costs en increasing returns resp. increasing cost en diminishing returns volledig ging onderzoeken. Het schijnt dat *Clark* in zijn boven geciteerd werk dit half bewust heeft willen doen: vandaar de uitgebreide behandeling van het hoofdstuk kostprijs in een boek, dat de hoofdproblemen van de organisatie behandelt. Helaas moet worden gezegd, dat *Clark* in zijn pogen niet is geslaagd: het feit echter dat hij de poging heeft ondernomen, plaatst hem op een niveau dat ver boven het gemiddelde van de literatuur uitkomt.

In een beperkt artikel als dit kunnen wij een dergelijke analyse natuurlijk niet uitwerken: wij beperken ons tot het maken van enkele kantteekeningen t.a.v. de degressieve en progressieve kosten.

Om te beginnen. hebben de „kosten" van de degressieve resp. progressieve kosten betrekking op den volledigen kostprijs of op afzonderlijke kostencategorieën (grondstoffen, loonen enz.)? De eerste duiden wij aan met Π de laatste met K.

Bij de differentieele calculatie, die op deze kostenbegrippen gebaseerd is, bedoelt men uiteraard Π . Nu is $\Pi = \Sigma K$ en van deze verschillende K's kunnen tegelijkertijd sommige progressief, andere degressief zijn. Wanneer men b.v. in drukke tijden in overwerk laat werken en extra kortingen op grondstoffen kan bedingen, zijn de loonkosten progressief

---

[10]) t.a.p. pag. 10.

[11]) Zoo b.v. *F. W. Taussig,* Principles of Economics, 4e druk, New York 1939 Chapter 13 pag. 171.

Hiertegenover een enkele opmerking bij *Vogelstein* „Die finanzielle organisation der modernen Kapitalistischen Industrie, Grundrisz der Sozial-Ökonomik VI", die in de goede richting gaat.

en de grondstofkosten degressief; of ten slotte II progressief of degressief zal zijn, hangt af van de mate van de progressie en degressie.

Een causale analyse van het progressieve c.q. degressieve gedrag van II *eischt dus een nieuwen vorm van kostenverbijzondering:* de kostencategorieën moeten n.l. verbijzonderd worden met betrekking tot het verband dat er bestaat tusschen iedere rubriek K en de grootte der productie per tijdseenheid, (P).

Als wij de reeds bestaande soorten van verbijzonderen mede rekenen, verkrijgen wij dus nu drie soorten kostenverbijzondering:

a. de methode van de toeslagpercentages (b.v. men slaat de indirecte kosten op de orders in een vast percentage van het directe loon per order of in een vast percentage van loon en grondstof enz.);
b. de parametermethode [12]). (Men slaat de indirecte kosten per product op in rechte evenredigheid met een grootheid, die voor deze kosten critisch geacht kan worden, b.v. kg grondstof, uren arbeid per kg verwerkte grondstof, in de weverij schot per uur enz.)
c. het verbijzonderen per rubriek (K), die in een bepaald functioneel verband staat met P en het vaststellen of benaderen van dit verband.

Deze laatste methode c. staat critisch tegenover de beide andere a. en b. omdat a. en b. steeds een rechte evenredigheid tusschen de kosten en een andere grootheid aannemen en c. juist een niet evenredig verband opspoort. Deze nieuwe verbijzondering eischt dus, dat wij nagaan in welke gevallen K degressief of progressief kan zijn. Ook deze vraag is nog niet voldoende afgegrensd. K kan b.v. degressief zijn bij vergrooting van het bedrijf of van het werktuig. Dit is dan een dynamisch verschijnsel d.w.z. dynamisch ten opzichte van de gegeven bedrijfshuishouding, die als statische eenheid wordt gegeven.

Een groot deel van de kostprijsvraagstukken is echter van statischen aard: gegeven een bepaalde bedrijfsprojectie en productietechniek, wordt het kostenverloop bij wisselende P gevraagd.

De vraag, die wij ten aanzien van de theorie van den kostprijs dienen te stellen, luidt in de eerste plaats: Hoe gedragen zich de verschillende K's bij gegeven bedrijfsprojectie en gegeven productietechniek en wisselende P.

Wij geven nu eenige voorbeelden van progressie en degressie van K's in het hier gestelde geval zonder te dien aanzien een limitatieve opsomming te willen geven.

A. degressief werkende oorzaken:
   1. het verkrijgen van kortingen bij het afnemen van groote hoeveelheden grondstoffen;
   2. het sparen van verkoopkosten bij toenemende afzet en dus toenemende P;
   3. het toepassen van uurloon of premieloon bij toenemende P;
   4. het dalen van de machinekosten per eenheid product bij toenemende P.

B. progressief werkende oorzaken:
   1. het stijgen van de grondstofprijzen en loonen bij toenemende vraag van den producent;

---

[12]) Deze uitdrukking ontleenen wij aan een artikel van *Ir. E. Hijmans* (Kostprijsberekening met behulp van parameters in Organisatie en Efficiency).

2. het toepassen van het differentieele stukloon van Taylor; het extra betalen van overwerk enz. bij toenemende P;
3. het overbelasten van machines en werktuigen;
4. het optreden van *„diminishing returns"* tengevolge van de *„afnemende trefkans"*.

Wij merken op, dat al leze gevallen kostendegressies en kostenprogressies van de meest verschillende gedaanten opleveren en dat alle degressies verkregen worden zonder dat constante kosten optreden. (Aanteekening III).

Wij hebben verder gezien, dat de constante kosten geen degressie van den totalen volledigen kostprijs Π veroorzaken, maar dat zij dit wel *kunnen* doen van den gemiddelden kostprijs π.

Of zij dit inderdaad zullen doen en zoo ja, in welke mate zij dit zullen doen, hangt af van de grootte der constante kosten en het verloop der afzonderlijke kostenrubrieken K. (Aanteekening IV)

Wij komen nu tot een belangrijke (normatieve) conclusie, die wij met een voorbeeld zullen toelichten.

Het baseeren van de differentieele calculatie op een empirisch (statistisch) bepaald verloop van Π is in ieder geval foutief. (Toch is deze empirisch bepaalde Π steeds de grondslag waar de literatuur van uitgaat.) Om iets wezenlijks van de differentieele kosten te weten, is het noodig en voldoende de 3e van de hierboven genoemde soorten van verbijzonderen toe te passen, waarbij dan verder het absolute bedrag der constante kosten exact moet worden bepaald. Wanneer dit gedaan is, is het vaststellen van het *verloop* van Π zelfs geheel overbodig, want voor ieder punt van P kan Π worden bepaald door eenvoudig sommeeren van de verbijzonderde K's en de constante kosten.

Het belang van deze conclusie schuilt hierin, dat men bij een statistisch bepalen van Π (in totaal) bijna altijd (zoo niet steeds) verspillingen zal meecalculeeren, die in den kostprijs niet thuis hooren. Het is juist de causale en quantitatieve analyse van Π naar de afzonderlijke kostenrubrieken K als functie van P die onontbeerlijk is. En zelfs als dit gebeurd is, kan men nog geen simplistische conclusies trekken. Wij willen met een enkel voorbeeld duidelijk maken waar wij hier op doelen.

Maken wij de volgende veronderstellingen:

1. Volgens de bedrijfsbegrooting is de productie vastgesteld op P = 20000 producten (uitgedrukt in kg)
De kosten van krachtopwekking zijn ..... *f* 0,10 per kg;
de grondstoffen zijn ..... ,, 0,80 per kg;
het loon bedraagt ..... ,, 0,50 per kg
de afschrijving en overige contante kosten bedragen *f* 10000.

Dit zijn cijfers ontleend aan de bedrijfsbegrooting en de standaardkostprijscalculatie.

De kostprijsformule is nu

$$\Pi = 1.4\ P + 10000$$

$$\pi = 1.4 + \frac{10000}{P}$$

dus

$$\Pi = 28000 + 10000 = 38000$$

$$\pi = 1.4 + \frac{10000}{20000} = 1.90$$

$$\xi = 1.40 \quad (\xi = \text{differentieele kosten})$$

Wordt nu een productie van 22000 inplaats van 20000 stuks bereikt, bedragen verder de werkelijke krachtkosten *f* 0,09 per kg en het werkelijke loon *f* 0,50½ per kg.

Wij krijgen dan

$$\Pi = 1.395\ P + 10000$$

$$\pi = 1.395 + \frac{10000}{P}$$

dus

$$\Pi = 30690 + 10000 = 40690$$

$$\pi = 1{,}39^5 + \frac{10000}{22000} = 1{,}85$$

$$\xi = 1{,}39^5$$

Toch kunnen deze laatste waarden van Π, π en ξ niet zonder nadere overweging als kostencijfers worden aanvaard. Het is n.l. de taak van de materieel economische analyse om vast te stellen of de hier aan den dag tredende verschillen deelen van den kostprijs, verspillingen of conjunctuurwinsten of verliezen zijn. Wij duiden het vraagstuk te dezer plaatse slechts aan: materieel economische analyse is niet de opgave van dit artikel. Wij volstaan slechts met de opmerking dat de geheele niet wiskundige en wiskundige literatuur over de differentieele calculatie c.a. de rol van het budget (en dus van de maximale productie c.a.) ten deze volmaakt over het hoofd ziet. In ieder geval is het zeker, dat het uitsluitend vaststellen van een empirische Π iedere nadere economische analyse onmogelijk maakt.

Ten slotte nog een enkel voorbeeld om te demonstreeren hoe volledig inadequaat de analyse van dergelijke problemen als regel wel gegeven wordt. Ongetwijfeld de beste schrijver over het onderwerp, *Clark* vertelt ons:

> „Therefore maximum financial efficiency is reached after the „return per labor has begun to diminish, but before it reaches zero. „The exact point will be the point at which the „variable cost" „(differential labor cost) per bushel for the last added bushel of „crop is equal to the average cost of the whole crop, including the „rent of land. Thus the law of „diminishing return" holds good „not as a purely technical principle, but as a principle of human „choice. The most economical combination is one in which all the „factors are in a stage of diminishing return." [13])

De opmerking, dat de meest juiste grootte van P die is, waar de differentieele kosten gelijk zijn aan de gemiddelde, is bij benadering juist. Men kan n.l. wiskundig de volgende stelling bewijzen:

Wanneer er niet proportioneele kosten optreden, al of niet gecombineerd met constante kosten, zal, wanneer voor eenige groote van P de differentieele calculatie gelijke resultaten opelvert als de integrale (dus wanneer $\xi = \pi$) voor deze grootte van P een minimum waarde, een maximum waarde of een buigpunt van π aanwezig zijn. (Aanteekening V) [14])

Schakelen we het buigpunt uit dan is „the exact point" van *Clark* een

---

[13]) t.a.p. pag. 87.

[14]) Dit is het geval van de critische punten voor niet proportioneele kosten waar differentieele kosten = integrale kosten waarop in den aanhef is gedoeld.

punt, waar de gemiddelde kosten, hetzij een minimum hetzij een maximum vertoonen. Men kan bewijzen, dat het minimumpunt van π optreedt als de kosten K progressief zijn en omgekeerd het maximumpunt als zij degressief zijn (zie aanteekening V).

Omdat *Clark*, zooals wij gezien hebben, zegt dat de meest economische combinatie is die, welke tot resultaat heeft, dat „all factors are in a stage of diminishing return" moeten wij concludeeren, dat hij bedoelt dat alle kosten steeds in een stadium van progressie moeten zijn en dat hij dus tracht π te minimaliseeren.

Onze recapitulatie en conclusie luiden dus:

Clark bedoelt dat de kosten progressief moeten zijn, en dat dus π een minimum moet vertoonen. In dit geval is zijn conclusie, dat de differentieele kosten gelijk moeten zijn aan de gemiddelde, juist.

Het is in het bijzonder te betreuren, dat *Clark* er niet op gewezen heeft dat zijn stelling een minimum waarde van π impliceert. Dit minimum punt geeft n.l. het begin van een gevarenzone aan. Overschrijdt men n.l. dit punt dan stijgen zoowel π als ξ en als ook de prijzen veranderen, gaan zij caeteris paribus dalen, totdat eindelijk ξ gelijk is aan of kleiner dan de prijs. Terecht heeft *Limperg* er op gewezen, dat het overschrijden van het minimumpunt van π is het dringen van het bedrijf in een grenspositie.

Het zich niet voldoende realiseeren van de beteekenis van deze minimumwaarde van π is wellicht wel de oorzaak van de denkfout, die de geheele theorie van de differentieele calculatie bij *Clark* (en overigens om nog geheel andere redenen in de geheele literatuur) onhoudbaar maakt. Deze denkfout is de volgende:

Juiste projectie van P eischt (volgens *Clark* zelf) die productiegrootte, waarbij $\pi = \xi$ d.w.z. die productiegrootte, waarbij de gemiddelde integrale kosten gelijk zijn aan de differentieele of grenskosten. In dit geval — dus bij juiste projectie — is de theorie van de differentieele calculatie zonder zin omdat zij dezelfde resultaten geeft als de integrale. *Clark* zou dus als hij een projectie van P aanneemt, die volgens hemzelf juist is, zijn boek verder ongeschreven hebben kunnen laten: omgekeerd, het geheele boek van *Clark* zondigt verder tegen een door hemzelf opgestelde en zeer belangrijke norm.

Wil het onderzoek naar de differentieele calculatie eenigen zin hebben dan moet men dus uitgaan van een onjuist vastgestelde productie P. Dit is steeds een te groote P. Zou n.l. P te klein zijn genomen, n.l. in het stadium dat π nog daalt, dan is ook weer de speciale beschouwing van ξ overbodig omdat uitbreiden van P beteekent een dalende π en dus ook integrale calculatie tot dalende kostprijzen voert.

Deze overschatte P, eigenlijk deze overproductie, corrigeert men echter nooit door een wijziging in de calculatie zooals men dit met differentieele calculatie, „proportionale Satz" e.d. tracht te bereiken. De kostprijsberekening behoort de berekening te zijn, die objectief de resultaten van de organisatie weergeeft; de differentieele calculatie maakt haar tot iets erger dan een subjectieve weerspiegeling hiervan. De differentieele calculatie is geen kostprijsberekening maar een op normenloos opportunisme gebaseerde prijspolitiek. En zooals het met ieder opportunisme gesteld is, is het ook hier gesteld: bevredigende resultaten kunnen per se niet bereikt worden.

Want is men eenmaal over het punt P waar $\pi = \xi$ heen dan beteekent verdere uitbreiding der productie dat π toeneemt en de prijs daalt: het algemeene prijsbederf is op den duur onvermijdelijk.

Hoe moet dan het vraagstuk van de unused capacity opgelost worden? Wij volstaan met het aangeven van de richting van de oplossing.

Bedrijfsbegrooting, gebaseerd op afzetbegrooting en marktanalyse (in zeer veel gevallen op zeer bescheiden schaal berustend op onderzoek door de eigen staf) behooren de plaats in te nemen van de differentieele calculatie. Men werkt dan bovendien preventief en komt niet zooals *Clark* en alle anderen achter de feiten aan. Bovendien is hier het onderzoek aan den elasticiteitscoëfficient van de vraag een onafwijsbare eisch. Het baart inderdaad groote verwondering, dat de literatuur over het onderhavige onderwerp het belang van dezen elasticiteitscoëfficient (de mate van prijsdaling bij uitbreidende P) zoo goed als altijd over het hoofd ziet. En hiermede komen wij tot de laatste belangrijke vraag die uit het voorgaande voortvloeit.

Uit het bovenstaande vloeit n.l. een critische opmerking ten aanzien van de gangbare wiskundige literatuur over het onderwerp voort. Zich baseerend op het economisch motief, leert de wiskundige economie veelal dat de productie moet worden voortgezet zoolang de prijs grooter is dan ξ. Dit is n.l. de manier om de winst te maximaliseeren. Erkend moet worden dat de formeele toepassing van het economisch motief tot deze conclusie leidt en dat ook de practijk veelal zoo heeft gehandeld. Toch is deze handelwijze — i.h.b. als π een minimum passeert en dus gaat stijgen — hoogst gevaarlijk. Een geringe prijsdaling brengt in dit geval onmiddellijk productie met verlies en vermoedelijk een marktpositie die catastrophaal kan worden (constante kosten en stijgende π!) en een depressie van jaren kan beteekenen.

Maar dan komt als onvermijdelijke consequentie van al het bovenstaande de volgende vraag aan de orde:

Heeft nu het onderzoek van het gedrag van de curven K, Π, π en ξ nog eenige waarde?

Zeer zeker is dit het geval, alleen moet men weten wanneer men het kan toepassen. Deze toepassing is noodig in een vroeger stadium van het kostenonderzoek, wanneer dit stadium ten minste niet wordt overgeslagen. De kennis van deze curven is noodzakelijk als men bij toepassing van de bedrijfsbegrooting het *flexibele* budget en de *flexibele* standaarden op de grootte van de productie gaat baseeren. Bovendien is de kennis van de vraagcurve van het product hier niet te missen.

Dus ook hier blijkt weer: de fout van de literatuur is, dat zij overwegingen die vooraf moeten gehouden worden uitstelt tot reeds voor een belangrijk deel over P en alle hieraan verbonden consequenties is beslist en dan achteraf tracht te corrigeeren door *calculatie* hetgeen door verkeerde *organisatie* is bedorven.

AANTEEKENINGEN.

I. Zijn de totale kosten Π en zij de productie P eenheden product per tijdseenheid. In dit geval is

productie P eenheden product per tijdseenheid. In dit geval is

$$\Pi = f(P)$$

en de differentieele kosten zijn dan gelijk aan de integrale indien

$$\frac{d\,\Pi}{d\,P} = \frac{\Pi}{P}$$

$$\frac{d\,\Pi}{\Pi} = \frac{d\,P}{P}$$

$$\lg\,\Pi = \lg\,P + c$$

$$\frac{\Pi}{P} = e^c$$

$$\Pi = P\,e^c = C\,P$$

waarmede bewezen is, dat de veronderstelling, dat de integrale kosten gelijk zijn aan de differentieele een proportioneel kostenverloop impliceert. De constante C is de parameter, die de kosten per eenheid aangeeft. Men ziet hier tevens, dat als $P = 0$ ook $\Pi = 0$ d.w.z. dat er geen constante kotsen optreden.

II. Het optreden van constante kosten beteekent in het algemeen wel een dalende (hyperbolische) kostencurve voor de gemiddelde integrale kosten, maar niet een degressieve totale kostencurve; integendeel juist een lineaire. Zijn de evenredig variabele kosten v, de constante kosten Γ en stelt men den gemiddelden integralen kostprijs voor door π dan is n.l.

$$\pi = v + \frac{\Gamma}{P}$$

en

$$P\,\pi = \Pi = v\,P + \Gamma$$

Waarschijnlijk is nu de foutieve gedachtengang van de in den tekst behandelde auteurs de volgende geweest: constante kosten veroorzaken in het algemeen een dalende π ,degressieve totaalkosten veroorzaken ook een dalende π dus zullen degressieve totaalkosten steeds een geval van het optreden van constante kosten voorstellen.

III. In onderstaande analyse stelt ξ de grenskosten $\frac{d\,K}{d\,P}$ voor; k de gemiddelde kosten

1. bij lineair verloopende grondstofkosten vindt men

$$\xi = -\,v_1\,P + A$$

$$k = -\,v_2\,P + A$$

$$K = -\,\frac{v_1}{2}\,P^2 + AP$$

waarin v_1, v_2 en A de parameters zijn, die den oorspronkelijken prijs en de korting bepalen. ξ en K zijn lineaire functies en K een parabool met loodrechte as. K is dus aanvankelijk degressief stijgend later progressief dalend. Op het maximumpunt van K is $\xi = 0$. ξ kan b.v. negatief zijn bij verkeerd vastgestelde vastrecht tarieven.

2. In het meer voorkomende geval, dat steeds geldt $\xi > 0$ stelt men b.v. $\xi = A\,P^{-1/2}$

Men vindt dan door eenvoudige integratie

$$K = 2\,A\,P^{1/2}$$

$$k = 2\,A\,P^{-1/2}$$

Om geen constante kosten in te schakelen is de integratie-constante weggelaten.

De parameter A stelt de helft van den prijs van de eerste eenheid voor. ξ en k zijn degressief dalend, K is degressief stijgend.

3. De betrekkingen

$$\xi = -3AP^2 + 2BP$$
$$k = -AP^2 + BP$$
$$K = -AP^3 + BP^2$$

zijn een combinatie van de vorige gevallen.

k vertoont hier het verloop dat K in geval 1 vertoont. Dus k is aanvankelijk degressief stijgend, later progressief dalend. K wordt een derde graads kromme, die een maximum ($P = \frac{2}{3}\frac{B}{A}$) en een buigpunt ($P = \frac{1}{3}\frac{B}{A}$) vertoont.

Verwisselen wij nu eens P en K d.w.z. noemen wij de kosten opbrengst en omgekeerd, dan verkrijgen wij een opbrengstcurve die verloopt als volgt:

1e. phase: meer dan proportioneele opbrengst;
1e. critisch punt: buigpunt d.w.z. de z.g. constant returns.
2e. phase minder dan proportioneele opbrengst;
2e. critisch punt: maximumpunt d.w.z. opbrengstvermeerdering wordt O en voorbij dit punt negatief.
3e. phase: negatieve opbrengst.

Dit is het beroemde geval uit *Clark's* Economics of overhead costs, pag. 86:

> „As labor per acre increases the crop per acre naturally passes „through five stages. It may increase (1) faster than labor (2) „just as fast (3) slower (4) not at alle, or (5) it may actually „decrease."

Clark vereenzelvigt hier stadia van de curve en punten op de curve. Verder merken wij op, dat als wij de theorie van de afnemende trefkans volgen er nooit progressieve productstoename is behalve in het volstrekt irrationeele stadium. Zie het volgende punt 4.

4. Het geval van de z.g. diminishing returns kan hier uiteraard niet volledig worden behandeld. Wel kan een beknopte analyse het inzicht in formuleeringsvraagstukken en den wezenlijken achtergrond van deze problemen aanmerkelijk verdiepen.

Noemen wij een gebruikte hoeveelheid van een bepaald productiemiddel (kostencategorie) K en voegen wij hieraan $\triangle K$ eenheden toe.

Laten hiermede verkregen worden resp. P en $\triangle P$ eenheden product.

De breuk $\frac{\triangle P}{\triangle K}$ stelt nu voor de gemiddelde toename van P bij toevoeging van één eenheid K. Wij weten dat deze toename van P bij toenemende K afneemt en voeren — ongeveer naar analogie van de wet van *Guldberg* en *Waage* — de nadere hypothese in dat

$$\frac{dP}{dK} = \frac{C}{K}$$
$$\frac{K}{P}\frac{dP}{dK} = \frac{C}{P}$$

Indien wij nu den elasticiteitscoëfficient $\frac{K}{P}\frac{d\,P}{d\,K}$ aangeven door η dan is

$$C = P\,\eta$$

De parameter C wordt dus gevonden door iedere willekeurige productiegrootte te vermenigvuldigen met den elasticiteitscoëfficient van deze productiegrootte.

Door eenvoudige integratie vinden wij nu

$$P = C \lg K$$

$$K = e^{\frac{P}{C}}$$

En verder

$$\xi = \frac{1}{C} e^{\frac{P}{C}}$$

$$k = \frac{1}{P} e^{\frac{P}{C}}$$

Indien in de formule voor K de waarde van $P = 0$ wordt krijgen wij

$$K = e^{\circ} = 1$$

Hier ontstaan dus inderdaad onvermijdelijk constante kosten.

Deze constante kosten kunnen worden geëlimineerd door te schrijven

$$K = e^{\frac{P}{C}} - 1$$

Echter hebben deze spontaan optredende constante kosten wel een economische beteekenis. Als men zoo weinig eenheden van een bepaald productiemiddel toevoegt (b.v. zoo weinig steenkolen onder de stoomketel brandt dat het water niet gaat koken), verkeert men in het hierboven bedoelde volsrekt irrationeele stadium (zie vorig punt over *Clark*). Alle kosten in dit stadium zijn constant. Op het moment dat een zeer kleine dosis wordt toegevoegd, die het resultaat van 0 tot een nog zoo kleine $a > 0$ doet stijgen, heeft men het volstrekt irrationeele stadium verlaten en treedt een toenemende, ja zelfs een oneindig toenemende meeropbrengst aan den dag; immers $\frac{a}{o} = \infty$.

Dit is bij het aanvaarden van de theorie van de afnemende trefkans, de eenige mogelijkheid dat er „increasing returns" kunnen optreden (dus dat het stadium (1) van *Clark* optreedt). Hierbij is dan merkwaardig dat ook dit weer geen stadium is; maar een punt n.l. de overgang van in het geheel geen resultaat tot eenige nog zoo klein resultaat.

Door terugredeneering volgt uit het bovenstaande dat de 3e graads kromme, die in de bovenstaande formuleering van *Clark* bevat is, voor dit geval niet goed is; immers deze vertoont een *stadium* van increasing returns.

Ofschoon de hypothese $\frac{d\,K}{d\,P} = \frac{C}{K}$ dus zeer bruikbaar is om iets dieper in het probleem door te dringen (vooral het automatisch optreden van constante kosten is hier zoo nuttig) zoo blijft het toch altijd een hypothese, die andere hypothesen geenszins bij voorbaat uitsluit. Zoo is b.v. mogelijk

$$\frac{d\,P}{d\,K} = C\,K^{-1/2}$$

Verdere analyse laten wij den lezer over. Slechts twee punten willen wij nog even aanstippen. Waarschijnlijk zullen bij het hier onmisbare empirische onderzoek curven aan den dag treden die van groep gevallen tot groep gevallen van gedaante verschillen. Vermoedelijk zullen deze curven soms minder eenvoudig zijn dan de bovenstaande die slechts als voorbeeld behandeld is.

IV. Een enkel voorbeeld ter toelichting.

Zijn de constante kosten Γ. de proportioneele kosten p en $K = e^{\frac{P}{C}}$ dan is

$$\Pi = P_P + e^{\frac{P}{C}} + \Gamma$$

$$\pi = p + \frac{e^{\frac{P}{C}}}{P} + \frac{\Gamma}{P}$$

De vraag of π progressief of degressief is, wordt dus beantwoord door vast te stellen wanneer $\frac{d\,\pi}{d\,P} \gtrless 0$

$$\frac{d\,\pi}{d\,P} = \frac{d}{d\,P}\left(p + \frac{e^{\frac{P}{C}}}{P} + \frac{\Gamma}{P}\right) =$$

$$= \frac{\frac{P}{C}\, e^{\frac{P}{C}} - e^{\frac{P}{C}}}{P^2} - \frac{\Gamma}{P_2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{P}{C}}\left(\frac{P}{C} - 1\right)}{P^2} - \frac{\Gamma}{P^2}$$

Het is dus de vraag of

$$e^{\frac{P}{C}}\left(\frac{P}{C} - 1\right) \lessgtr \Gamma$$

Het zijn dus de parameters C en Γ die bij gegeven P beslissen over progressie of degressie. Wij weten verder dat $C = P\eta$ of m.a.w. de elasticiteitscoëfficiente η en de constante kosten Γ beslissen bij gegeven P over progressie of degressie.

V. Een volledig bewijs wordt te uitvoerig. Wij volstaan met het geven van de belangrijkste aanwijzingen. Wij gaan uit van de volgende notatie.

$$K = f_1(P)$$

$$\frac{d\,K}{d\,P} = \xi$$

$$\frac{K}{P} = \pi = f_2(P)$$

Gevraagd wordt wanneer $\frac{K}{P} = \frac{d\,K}{d\,P}$

Geheel analoog aan aanteekening I bewijst men dat een rechte lijn aan deze voorwaarde voldoet.

Gemeenschappelijke punten van $K = f_1(P)$ met de rechte $K = Pc$ voldoen dus voor de kromme $K = f_1(P)$ aan de gestelde voorwaarde. De

vraag is of dit snijpunten of raakpunten zijn. Aangezien voor de kromme $K = f_1(P)$ geldt $\frac{d\,K}{d\,P} = \frac{K}{P} = \pi$ hebben wij hier met raakpunten te doen.

De vraag of $\frac{K}{P} = \pi$ een minimum, maximum of buigpunt vertoont, is eenvoudig te beantwoorden met behulp van fig. 2.

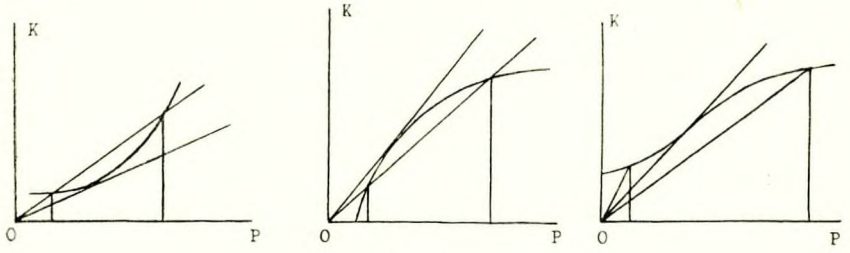


Fig. 2.

Deze schetsen behandelen niet alle gevallen. De constructie van een volledig stel curven en de analytische uitwerking van een en ander is aan te bevelen om een volledig inzicht in deze materie te verkrijgen.

Ten slotte behandelen wij nog een concreet voorbeeld dat ons de rol van de constante kosten ten deze in een helder licht plaatst.

Is $K = AP^2 + BP + \Gamma$ waarin Γ de constante kosten voorstellen.

Nu is

$$\pi = \frac{K}{P} = A\,P + B + \frac{\Gamma}{P}$$

$$\xi = \frac{d\,K}{d\,P} = 2\,A\,P + B$$

De vraag is wanneer

$$A\,P + B + \frac{\Gamma}{P} = 2\,A\,P + B$$

$$\frac{\Gamma}{P} = A\,P$$

$$P = \sqrt{\frac{\Gamma}{A}}$$

Hier blijken de constante kosten essentieel te zijn. Immers is $\Gamma = 0$ dan is ook $P = 0$. welke waarde voor P economisch geen zin heeft. Inderdaad geeft $P = \sqrt{\frac{\Gamma}{A}}$ een minimum waarde zooals blijkt uit

$$\frac{K}{P} = A\,P + B + \frac{\Gamma}{P} = \text{min!}$$

$$A - \frac{\Gamma}{P^2} = 0$$

$$P = \sqrt{\frac{\Gamma}{A}}$$

Het blijkt dat wanneer er geen constante kosten optreden

$$\frac{K}{p} = A\,P + B + \frac{r}{p}$$

overgaat in

$$\frac{K}{p} = A\,P + B$$

De gemiddelde kosten worden dan voorgesteld door een lineaire functie die uiteraard geen extreem vertoont. De voorwaarde voor de gelijkheid van de differentieele en integrale kosten is dus dan niet aanwezig.

De constante kosten spelen in dit geval dus een essentieele rol, alleen een geheel andere dan de schrijvers zich voorstellen.

Intusschen zal het den lezer niet moeilijk vallen om een curve te construeeren waar $\pi = \xi$ zonder dat er constante kosten optreden.

STATISTIEK EN BEDRIJFSSTATISTIEK

door Dr. J. H. van Zanten

Een boekje, dat de redactie mij ter recensie zond [1]), geeft mij aanleiding hier nog eens — want het is niet de eerste maal — aandacht te vragen voor de verhouding tusschen de algemeene en wat men in den regel noemt de bedrijfsstatistiek en voor de wenschelijkheid eener veel nauwere samenwerking van die beide dan tot dusverre heeft bestaan.

Dit boekje acht ik n.l. een symptoom, een symptoom van wat ik de laatste jaren, nu ik in de gelegenheid ben geweest kennis te nemen van verschillende boekjes over statistiek, geschreven ten behoeve van hen, die eenig examen voor boekhouden, handel en administratie, handelskennis, accountancy, hebben af te leggen, meen te constateeren, n.l. het feit, dat zich een afzonderlijk vak statistiek voor het bedrijfsleven heeft ontwikkeld, dat naast de algemeene statistiek komt te staan, zooals deze door de statistische overheidsorganen wordt beoefend. Immers wat bij de lezing dier boekjes sterk opvalt, is, dat zij, hoewel zij — min of meer, hoewel meestal veel minder volledig — dezelfde onderwerpen behandelen als de algemeene handboeken over statistiek, dit doen op een wijze, alsof die zich in het bedrijf geheel anders voordoen dan elders, wat echter geenszins het geval is.

Deze opvatting heeft twee gevolgen, die beide even onnoodig en ongewenscht zijn, n.l. een scheiding, waar samenwerking noodig is, en een dubbele terminologie voor dezelfde begrippen.

Dat deze gevolgen onnoodig zijn, blijkt direct, als men nagaat, waaruit het statistisch onderzoek feitelijk bestaat. Dan vindt men, dat, op welk onderwerp het ook betrekking heeft, zij het de bevolking of het inkomen, de volkshuisvesting, het onderwijs of een tak van bedrijf dan wel een enkele onderneming, steeds denzelfden gang heeft, mits men ervan uitgaat — en dat zal iedereen doen, die er zich mee bezig houdt, omdat statistiek nu eenmaal niet anders is — dat statistiek toch altijd het vak blijft, dat ten doel heeft massa's waar te nemen en daarin verschijnselen te zoeken, die men op andere wijze niet kan vinden; dat zij dus eenerzijds is de wetenschap, die leert, hoe men dat doen moet, anderzijds de prak-

[1]) *W. Westra*, Inleiding tot de bedrijfsstatistiek.