DE OPTIMALE PRODUCTIESERIE

door N. C. Looijaard †

De Redactie brengt tot haar leedwezen ter kennis van de lezers, dat de heer Looijaard op 29 september is overleden. Zij bewaart een dankbare herinnering aan zijn belangstelling voor het M.A.B. De correctie van dit artikel heeft van redactiewege plaats gevonden.

A. INLEIDING

Het probleem van de meest economische productie- resp. bestelserie is door de werkzaamheden van de Werkgroep Typebeperking [1]) alsmede door de recente publicatie van Groot [2]) weer eens onder de aandacht van het publiek gekomen.

Een tiental jaren geleden heeft Buijs [3]) hierover een artikel gepubliceerd.

Voor een uitgebreidere behandeling van het probleem dan in dit artikel zal plaats vinden, verwijs ik gaarne naar genoemde publicaties alsmede — voor degenen die zich met diepgaande wiskundige behandelingen van het probleem willen vermeien — naar die van een aantal buitenlandse publicisten [4]) en de bij deze artikelen gegeven literatuur.

In het volgende wordt alleen over productieseries gesproken. Wanneer niet uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld, geldt alles ook in principe voor bestelseries.

B. HET PROBLEEM.

Wanneer een nieuwe serie artikelen in productie wordt genomen, zijn hieraan kosten verbonden, waarvan ik hier noem:

a. het loon van de arbeider(s) voor het opnieuw instellen van de machine(s);
b. de productiederving tijdens het instellen;
c. de geringere productie gedurende de aanlooptijd;
d. de administratieve kosten voor de nieuwe serie; enz. enz.

Deze kosten zijn vrijwel onafhankelijk van de seriegrootte. Ze vormen een constant bedrag per serie (gelijksoortige producten) en worden in het hiernavolgende aangeduid met „instelkosten".

Aan het houden van voorraad zijn eveneens kosten verbonden, waarvan ik hier noem:

---

[1]) Werkgroep Typebeperking, opgericht door de Contactgroep Opvoering Productiviteit (COP) in samenwerking met de Hoofdcommissie voor Normalisatie in Nederland (HCNN).

[2]) Drs. A. M. Groot, Kunnen voorraden ook rente opleveren?, N. Samsom N.V. Alphen aan den Rijn 1954.

[3]) B. G. Buijs, Eenige beschouwingen over de meest economische bestelserie en het bestelniveau, n.a.v. de voordracht „Turnover-speed of stocks" gehouden voor het vijfde Internationale „Congress for Scientific Management" door Prof. Dr. Ir. J. Goudriaan Jr. en Ir. J. F. Cahen. Tijdschrift voor Efficiency en Documentatie 1944/45 No. 8 pag. 86/92.

[4]) a. Kenneth J. Arrow, Theodore Harris and Jacob Marchak, Optimal inventory policy, Econometrica, Vol. 19, Juli 1951 No. 3 pag. 250/72;

b. A. Dvoretsky, J. Kiefer and J. Wolfowitz, The inventory problem I Case of known distributions of demand, Econometrica, Vol. 20, April 1952 No. 2 pag. 187/222;

c. Idem, idem, II Case of unknown distributions of demand, Econometrica, Vol. 20, Juli 1952 No. 3 pag. 450/66;

d. Idem, On the optimal character of the (s, S) policy in inventory theory, Econometrica, Vol. 21, October 1953 No. 4 pag. 586/96;

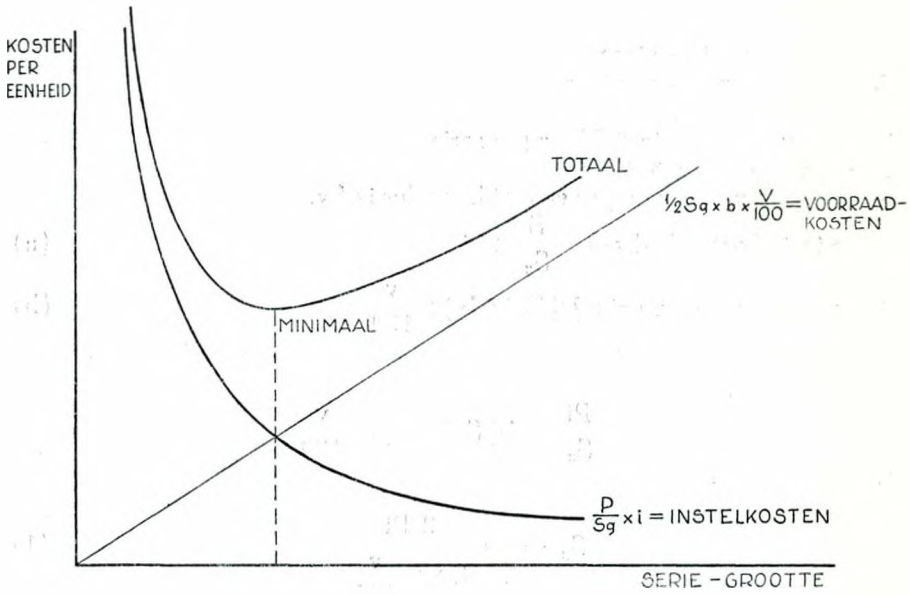
e. Murray Rosenblatt, An inventory problem, Econometrica Vol. 22, April 1954 No. 2 pag. 244/7.

a. rente over de in de voorraad geïnvesteerde gelden;
b. risico voor bederf, veroudering enz.;
c. kosten van de in beslag genomen ruimte;
d. assurantiekosten; enz. enz.

Deze kosten zijn in totaal hoger, naarmate de voorraden hoger zijn en worden evenredig verondersteld aan de gemiddelde waarde der voorraden. In het hiernavolgende wordt van „voorraadkosten" gesproken.

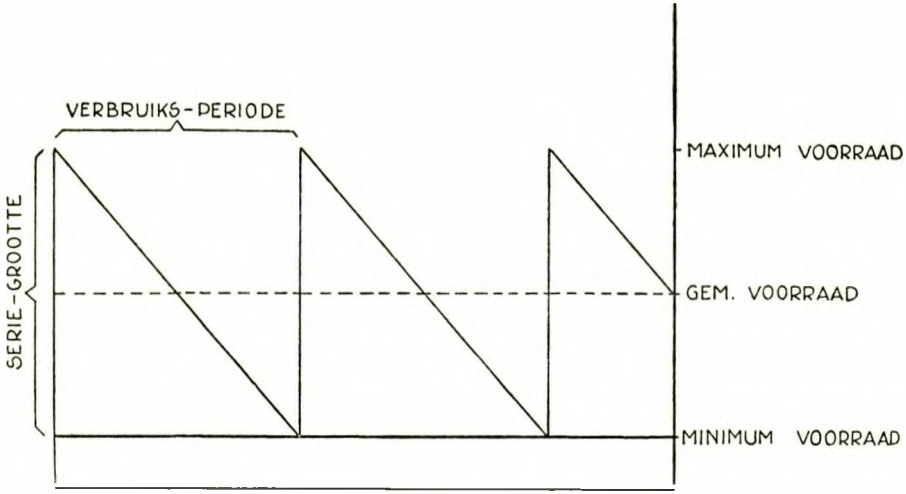
Het probleem is nu, de omvang van de productieserie te berekenen, waarbij het totaal van instel- en voorraadkosten minimaal is.

De instelkosten vormen een constant bedrag per serie en worden dus lager per eenheid product, naarmate de serie groter is. Ze worden grafisch voorgesteld door een hyperbool, die beide assen van het coördinatenstelsel tot asymptoot heeft.
De voorraadkosten per eenheid product zijn evenredig met de grootte van de voorraden en worden grafisch voorgesteld door een stijgende rechte lijn. (zie Fig. 1).



Wanneer de geproduceerde serie in eens in magazijn komt, stijgt de voorraad met deze hoeveelheid en daalt, een geleidelijk verbruik aangenomen, geleidelijk totdat de minimum voorraad weer is bereikt. Hieruit volgt, dat de gemiddelde voorraad gelijk is aan de halve seriegrootte [5]. In Fig. 2 is dit in tekening gebracht.

[5]) De minimum voorraden, als zijnde voor het probleem van geen belang, worden hier buiten beschouwing gelaten.



De optimale seriegrootte kan nu als volgt berekend worden, waarbij ik gebruik maak van de volgende symbolen:

P = productie per jaar
S_a = aantal series per jaar
S_g = seriegrootte
i = instelkosten in guldens per serie
v = voorraadkosten in %
b = productiekosten per eenheid, zonder i of v.

De instelkosten bedragen $\frac{S}{S_g} \times i$ (a)

De voorraadkosten zijn $\frac{1}{2} S_g \times b \times \frac{v}{100}$ (b)

Wiskundig valt te bewijzen, dat deze kosten in totaal minimaal zijn als ze aan elkaar gelijk zijn. Uit de gelijkheid

$$\frac{Pi}{S_g} = \frac{1}{2} S_g \times b \times \frac{v}{100}$$

is de waarde van S_g af te leiden:

$$S_g = \sqrt{\frac{2\,Pi}{b \times \frac{v}{100}}} \qquad (1)$$

Dit is de door Buijs gegeven formule.

Wanneer we het aantal series per jaar (S_a) als uitgangspunt nemen, dan worden de instelkosten $S_a \times i$ (c)

De voorraadkosten zijn de halve seriegrootte $\left(\frac{1}{2} \frac{P}{S_a}\right)$ vermenigvuldigd met productiekosten maal voorraadkosten in procenten $\left(b \times \frac{v}{100}\right) =$

$$\frac{\frac{1}{2}P}{S_a} \times b \times \frac{v}{100} \qquad (d)$$

Het totaal dezer kosten is minimaal als

$$S_a \times i = \frac{\frac{1}{2}P \times b \times \frac{v}{100}}{S_a}$$

Hieruit volgt, dat

$$S_a = \sqrt{\frac{\frac{1}{100}P}{\frac{2i}{b} : v}} \qquad (2)$$

Dit is de door Groot gegeven formule, zij het met andere symbolen en in enigszins andere vorm.

C. VOORBEELD

Ter illustratie worden beide formules in cijfers omgezet, waarbij

P = 19.200 eenheden
i = F. 150,—
b = F. 0,50
v = 12½%

Formule (1) geeft dan $S_g = 9.600$ en formule (2) $S_a = 2$, waaruit blijkt, dat $S_g \times S_a$ inderdaad $= P$ is.

Tevens blijkt, dat i en v (in geld uitgedrukt) aan elkaar gelijk zijn.

i = F. 150,—
v = 12½ % van ¼ × 9.600 × F. 0,50 = F. 150,—.

De factor ¼ × 9.600 × F. 0,50 is als volgt te verklaren:
De series zijn groot 9.600 eenheden à F. 0.50. Er zijn 2 series per jaar. Iedere serie is dus ½ jaar in magazijn. De gemiddelde voorraad is ½ serie, dus v wordt hier berekend over de waarde van ¼ serie.

D. CRITIEK.

In beide formules zijn de magazijnkosten berekend over de „naakte" productiekosten. Dit is niet normaal. De goederen worden in magazijn genomen tegen de werkelijke waarde — eventueel berekend tegen standaardprijzen — doch in ieder geval m.i.v. de instelkosten.

De magazijnkosten worden dan ook normaliter uitgedrukt in een percentage van de innamewaarde.

Aangezien de basis der berekening van de optimale seriegrootte ligt in het feit dat de instelkosten gelijk zijn aan de voorraad kosten, kan i vervangen worden door $\frac{v}{100} \times b$.

Verwerken we dit in vorenstaande formules dan worden deze resp.:

(1)
$$S_g = \sqrt{\frac{2P \times i}{\frac{v}{100} \times b \times \left(1 + \frac{v}{100}\right)}} \qquad (3)$$

(2)
$$S_a = \sqrt{\frac{\frac{1}{100}P \times \left(1 + \frac{v}{100}\right)}{2\frac{i}{b} : v}} \qquad (4)$$

Uitgedrukt in dezelfde waarden als sub C wordt

(3) $S_g = 9.051$ en
(4) $S_a = 2{,}121$

waaruit blijkt, dat in de oorspronkelijke berekeningen de serie 6% te groot is genomen.

Dit bezwaar is te ondervangen door voor de berekening van de optimale seriegrootte de magazijnkosten om te rekenen in een percentage van de „naakte" kostprijs.

Of beide genoemde schrijvers (Buijs en Groot) dit bedoeld hebben, heb ik uit hun geschriften niet kunnen opmaken.

Overigens ligt vorenstaande critiek in het academische vlak, aangezien een afwijking in seriegrootte van enkele procenten slechts een zeer geringe invloed heeft op de kosten. In het onderhavige voorbeeld was dit verschil F. 1,—.

E. GELEIDELIJK GEREED KOMENDE PRODUCTIE.

Interessanter is het volgende probleem, waarop Prof. Ir. T. J. Bezemer mij onlangs attent maakte [6]).

Wanneer de productie van de machines komt, wordt deze niet in eens aan het magazijn geleverd maar geleidelijk, regelmatig verdeeld over een (kleiner of groter) aantal dagen [7]).

Uitgaande van de veronderstelling dat de afname een regelmatig verloop heeft, ligt de maximum-voorraad [8]) lager dan de seriegrootte en komt dus de gemiddelde voorraad ook lager te liggen.

Bij een lagere gemiddelde voorraad worden de voorraadkosten lager en kan dus de productieserie groter worden, aangezien de totale minimumkosten daar liggen, waar instelkosten en voorraadkosten aan elkaar gelijk zijn.

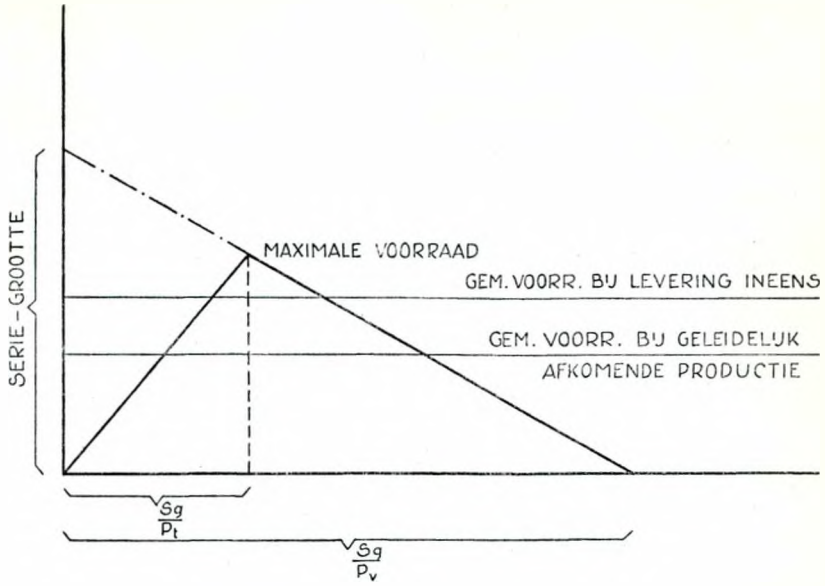
Noemen we de productie, die per dag aan het magazijn wordt afgeleverd p_t en de afname uit magazijn (b.v. verkoop, verbruik) p_v, dan is de tijd die verloopt tussen begin en einde van de aflevering door de fabriek aan het magazijn $\frac{S_g}{p_t}$ en de tijd tussen het begin van de aflevering door het magazijn van twee opeenvolgende series (= de tijd gedurende welke een serie geheel is verkocht of verbruikt) $\frac{S_g}{p_v}$. Een en ander wordt verduidelijkt in Fig. 3.

---

[6]) Hoewel de grondgedachte en de richting van het onderzoek van Prof. Bezemer afkomstig zijn, blijft de uitwerking geheel voor rekening van schrijver dezes.

[7]) Deze paragraaf (E) heeft uitsluitend betrekking op productie, niet op aankoop.

[8]) Zie noot [5]).



De maximum voorraad (bij aflevering aan magazijn in eens $= S_g$) wordt lager, doordat tijdens de aflevering der productie de verkoop doorgaat.

Gedurende de productieperiode stijgt de voorraad met $p_t - p_v$ per dag. Daarna daalt de voorraad met p_v per dag.

Het maximum waartoe de voorraad stijgt is dus

$$(p_t - p_v) \times \frac{S_g}{p_t} = S_g \left(1 - \frac{p_v}{p_t}\right) \quad 9)$$

De gemiddelde voorraad wordt dan $\frac{1}{2} S_g \left(1 - \frac{p_v}{p_t}\right)$.

Substitueren we in factor (b) $\frac{1}{2} S_g$ door $\frac{1}{2} S_g \left(1 - \frac{p_v}{p_t}\right)$ dan wordt formule (1)

$$S_g = \sqrt{\frac{2 P i}{b \times \frac{v}{100} \times \left(1 - \frac{p_v}{p_t}\right)}} \qquad (5)$$

Hieruit volgt dat S_g groter wordt, naarmate het verschil tussen p_v en p_t kleiner is. Bij $p_v = p_t$ wordt $S_g = \infty$. Dit betekent:

---

9) Het zal de aandachtige lezer opvallen, dat hier een kleine fout wordt gemaakt. Komt de productie in eens in magazijn, dan is $S_g = p_t$ en wordt de maximum voorraad $(S_g - p_v) \times 1$ of in woorden: de dag waarop de voorraad binnenkomt wordt er ook afgeleverd en de maximum voorraad is dan de serie minus de afname voor één dag.

Stellen we omgekeerd dat de serie werkelijk de maximum voorraad is, dan zou de formule moeten worden:

$$\left[(p_t - p_v) \frac{S_g}{p_t}\right] + p_v.$$

Aangezien dit het principe van het betoog niet aantast, heb ik deze complicatie buiten beschouwing gelaten.

1. dat het meest economisch is als de producent een zodanige combinatie van machines vormt, dat deze juist zoveel produceren als de afzet bedraagt, daar in dit geval instelkosten en voorraadkosten vrijwel nihil zijn;
2. dat anderzijds bij een gegeven productie-capaciteit de verkoop-afdeling er naar moet streven, de omzet af te stemmen op deze capaciteit.

F. SLOTOPMERKINGEN.

De hiervóór genoemde berekeningen zijn uiteraard niet van toepassing, indien een bedrijf seizoengebonden productie of afzet heeft.

Ook doet zich een complicatie voor, wanneer de bestelserie bij een bepaalde grootte gepaard gaat met een extra korting.

Aangezien deze en andere problemen echter in de recente publicatie van Groot behandeld worden, heb ik gemeend ze in het onderhavige artikel buiten bespreking te moeten laten.

Een ander buiten behandeling gebleven probleem is de optimale bezetting der magazijnen, waarbij het op elkaar afstemmen der leveringsdata en seriegrootten een rol speelt. Dit is een interessant onderwerp voor lineaire programmering.

BOEKBESPREKINGEN

Prof. Dr. H. J. van der Schroeff: KWANTITATIEVE VERHOUDINGEN EN ECOMISCHE PROPORTIONALITEIT

Proportion of Factors and Proportionality, A Study on the Application of the principle of Substitution in production."
N.V. Uitgevers-Maatschappij „Kosmos", Amsterdam-Antwerpen 1955. 207 blz.

door Prof. Dr. L. M. Koyck

De verhandeling die Prof. Dr. H. J. v. d. Schroeff ons in zijn recente boek: „Kwantitatieve Verhoudingen en Economische Proportionaliteit" voorlegt betreft een vraagstuk dat de auteur reeds vele jaren heeft bezig gehouden. Zijn in 1940 verschenen dissertatie immers handelde reeds over „Kwantitatieve Verhoudingen en Kosten".

Op tal van punten zijn de opvattingen van de schrijver na het verschijnen van zijn proefschrift gewijzigd, en in het thans gepubliceerde boek zijn deze gewijzigde opvattingen neergelegd.

Het probleem dat in dit boek wordt behandeld, is dat van de kwantitatieve verhoudingen in de produktie, en wel meer in het bijzonder de keuze van de combinatie van produktiemiddelen die voor het bereiken van een gegeven produktieomvang optimaal is, optimaal in die zin dat de totale offers zo laag mogelijk zijn.