

KNELPUNTSCALCULATIE: EEN NADERE ANALYSE

door Drs. H. J. Scholtmeijer

1 Het artikel van Drs. B. Boomsma getiteld „Praktische toepassing van de knelpuntscalculatie” verschenen in september 1966 van dit Maandblad gevolgd door een artikel „Hoe normatief is normatief?” van Drs. L. A. Ankum en Drs. H. M. A. Koenders in het jl. februari-nummer geeft mij aanleiding nog eens op de voorgestane wijze van calculeren terug te komen en wel om twee redenen. In de eerste plaats om duidelijk te maken dat de gebruikte techniek die van de lineaire programmering is en ten tweede dat bij de aan de orde zijnde keuzeproblematiek kennis van de integrale kostprijs niet nodig is en tot onjuiste beslissingen kan leiden.

De problematiek die Boomsma aansnijdt, betreft het opstellen van een optimaal productie- en verkoopplan bij gegeven productie-installaties.

In een periode, waarin de productie-installaties ongewijzigd blijven, zijn de constante kosten gegeven, die onafhankelijk of veel of weinig wordt geproduceerd, blijven bestaan. De vraag welke artikelen zullen worden gemaakt, wordt bepaald door die artikelen, waarbij het verschil tussen opbrengst en variabele kosten zo groot mogelijk is. De bijdrage tot dekking van de constante kosten is dan eveneens zo groot mogelijk.

De voorbeelden die behandeld worden betreffen alle artikelen die onbeperkt tegen vaste verkoopprijzen kunnen worden afgezet. Bij de productie treden beperkingen op, doordat in de periode de capaciteit niet overschreden kan worden.

2 Het eerste probleem van Boomsma kan als volgt als een lineair programmeringsprobleem (lp) worden geformuleerd.

Maximeer $150 h_a + 250 h_b$, onder de voorwaarden dat,

$$\frac{1}{2} h_a + h_b \leq 50$$

en $h_a, h_b \geq 0$ zijn.

Het gaat om twee artikelen h_a en h_b , die per stuk een bijdrage leveren van f 150,— en f 250,—. Een artikel h_a vergt een $\frac{1}{2}$ uur, h_b vergt 1 uur van de machine. In totaal zijn 50 uren beschikbaar.

Zonder de techniek van de lp te demonstreren, is het duidelijk dat bij $h_a = 100$ stuks en $h_b = 0$ de winst maximaal f 15.000,— is. Berekening met lp zou nog twee resultaten hebben laten zien: de bruto-winst of schaduwprijs van een machine-uur is f 300,— en het niet maken van één h_b geeft een voordeel van f 50,—.

Dit laatste kan als volgt worden aangetoond, waarbij we tevens bij de gebruikte vergelijkingen van Boomsma terechtkomen.

Elk lp-probleem kan op twee wijzen worden opgeschreven. Naast bovenstaande eerste vorm kan een tweede (duale) vorm worden opgeschreven, nl.

Minimeer $50 X$, onder de voorwaarden, dat

$$\frac{1}{2} X \geq 150$$

$X \geq 250$ zijn.

Nu behoeven we maar een van beide stelsels op te lossen. Maar gesteld, dat we weten wat we weten, nl. dat het produktiemiddel geheel bezet is en dat we geen enkel artikel B maken. Dan gaat de eerste nevenvoorwaarde over in een gelijkheid en de tweede in een strikte ongelijkheid.

We hebben $\frac{1}{2}X = 150$ waaruit volgt $X = 300$

$X > 250$, ofwel $X - V = 250$. We trekken van het linkerlid symbolisch V af om een gelijkheid te verkrijgen. Voor V vinden we 50. Terwijl de restricties van het eerste lp-probleem in hoeveelheden luiden, luiden die van het duale probleem in geld. Met recht kunnen we zeggen dat de toegerekende prijs of schaduwprijs van één machine-uur in het optimale programma f 300,— is. Aan gezien het produktiemiddel volledig bezet is, is het een knelpuntsfactor geworden. Indien de capaciteit met 1 uur wordt vergroot, zou de winst met f 300,— kunnen toenemen. Zou de capaciteit niet geheel zijn bezet dan zou de prijs nul zijn. Immers als we er toch al genoeg van hebben, stellen we geen prijs op uitbreiding!

Zoals gezegd zou het maken van 1 h_b de winst met f 50,— doen dalen. Voor 1 h_b moeten we 2 h_a afstaan, zodat tegen een winst van f 250,— een verlies van f 300,— zou staan. Zou de prijs van B met f 50,— tot f 300,— stijgen, dan kunnen we ook B gaan vervaardigen. Bij dit eenvoudige voorbeeld blijkt, dat we al deze belangrijke conclusies ook zonder kennis van lp kunnen trekken.

Wellicht is het mogelijk de voorwaarden waaronder B wordt geproduceerd te wijzigen. Hoever moeten we hiermee gaan, opdat gegeven de prijs van B en de totale productie-capaciteit, B eveneens zal worden geproduceerd?

Noemen we de tijd, waarin 1 h_b kan worden geproduceerd: t , dan dient

$t \times 300 - 250 \leq 0$ te zijn. Derhalve $t \leq \frac{250}{300} = \frac{5}{6}$. Zouden we de tijd die het vervaardigen van B kost met $\frac{1}{6}$ kunnen verminderen, dan is het mogelijk of 100 A of 60 B of wel elke combinatie $100\alpha A + 60(1-\alpha)B$, met $0 < \alpha < 1$, te maken.

Zou zich een ander artikel aandienen, dat noodzakelijkerwijs van het schaarse produktiemiddel moet gebruikmaken dan maken we de berekening: $t \times$ schaduwprijs — bijdrage van het artikel. Bij een positieve uitkomst maken we het niet. Is de uitkomst negatief dan zal door vervaardiging van het nieuwe artikel de winst toenemen.

Is bv. van het artikel $t = \frac{3}{4}$ uur en de bijdrage f 250,— zodat $\frac{3}{4} \times f$ 300,— — f 250,— < 0 . De winst stijgt dan tot $(50: \frac{3}{4}) \times f$ 250,—.

3 Terugkerende naar het voorbeeld is besloten in afwijking van het optimale plan 60 A en 20 B te maken. De winst bedraagt dus $20 \times f$ 50,— = f 1000,— minder. Het is nu onjuist, zoals Boomsma doet, de bruto-uurwinst per machine-uur op $14000 : 50 = f$ 280,— te stellen. Op deze wijze is een nieuwe schaduwprijs vastgesteld, die ook kan worden berekend als f 300,— $(1000:50)$. Deze f 280,— is een onjuist criterium om te beslissen over de vraag, wanneer een ander artikel met voordeel kan worden vervaardigd. Stel dat het nieuwe artikel $\frac{5}{6}$ uur

vergt. Nu is $\frac{5}{6} \times f 280,- = f 233,-$. Bij een prijs van $f 240,-$ blijkt, dat we een verlies lijden van $f 10,-$. De prijs zal minstens $\frac{5}{6} \times f 300 = f 250,-$ moeten bedragen!

Zonder kennis van de constante kosten, kunnen dus een aantal belangrijke problemen worden opgelost. Indirekt spelen ze natuurlijk wel een rol. In het vorenstaande hebben we geconstateerd, dat vergroting van de capaciteit met 1 machine-uur de winst met $f 300,-$ doet toenemen. We kunnen nu ook stellen, als we dit produktie- en verkoopplan kunnen realiseren, dan willen we voor één machine-uur niet meer dan $f 300,-$ betalen. Indien de aanschaffing- en onderhoudskosten van de machine uitgedrukt per machine-uur lager zijn dan $f 300,-$ loont het zich deze machine te kopen. Bij constante kosten van $f 200,-$ per machine-uur is de netto-winst per machine-uur $f 100,-$. Heeft men nu 48 A en 16 B vervaardigd in 43 uren in plaats van in 40 uren dan geven de 10 uren een verlies van $f 1000,-$. Hier staat tegenover dat er 16 B zijn gemaakt, zodat er uit dezen hoofde een voordeel is van $4 \times f 50,- = f 200,-$.

Verder is een verlies wegens onderbezetting

$$(50-43) \times f 200,- = f 1400,-$$

en een verlies wegens inefficiency

$$(43-40) \times f 200,- = f 600,- \quad f 2000,-$$

Op het totale verlies van $f 3000,-$ wordt een correctie aangebracht van $f 200,-$ tot $f 2800,-$.

4 Het tweede voorbeeld betreft een produktieplan van twee artikelen en twee produktiemiddelen. Het blijkt, dat beide artikelen worden vervaardigd en dat beide produktiemiddelen volledig bezet zijn. Uitgaande van deze kennis kunnen we de nevenvoorwaarden van het duale lp-probleem opschrijven als gelijkheden nl. $30X + 20Y = 3100$ en $10X + 20Y = 2100$, waaruit X en Y zijn op te lossen.

Boomsma schrijft deze vergelijkingen direkt op, zonder aan te tonen dat dit mag! Daartoe zal eerst het lp-probleem in een van de beide vormen moeten worden opgelost. Is dit gebeurd dan zijn de bovenstaande vergelijkingen echter niet nodig!

5 Het derde voorbeeld is het meest interessant. Het betreft 4 artikelen en 2 produktiemiddelen. Boomsma tracht nu vier vergelijkingen in twee onbekenden op te lossen, hetgeen niet gelukt. Het stelsel dient dan ook uit ongelijkheden te bestaan. Daar van de 4 artikelen er slechts twee, A en B, in het optimale programma voorkomen en beide produktiemiddelen vol bezet zijn, kunnen we schrijven:

$$\begin{array}{lcl} 4X + Y = 400 & \} & \text{wuv } X = f 73,86 \\ X + 2Y = 283 & \} & Y = f 104,57 \quad \text{Som } f 178,43 \end{array}$$

Daar de artikelen C en D niet voorkomen in het optimale programma geldt:

$$\begin{array}{lcl} 9X + 6Y > 950 & \text{of wel } 9X + 6Y - v_c = 950 & \} \text{wuc } v_c = f \frac{2395}{7} \text{ en } v_d = f \frac{1791}{7} \\ 5X + 8Y > 950 & 5X + 8Y - v_d = 950 & \} \text{samen } f 598. \end{array}$$

De winst is maximaal $42 \times f 178,43 = f 7494$. Vervaardigen we van C en D

elk 2 stuks dan daalt de winst met $2 \times f 598 = f 1196$ tot $f 6298$. Maken we 3 C en 3 D, waarbij A en B niet gemaakt worden dan daalt de winst met $f 1794$ tot $f 5700$. Wat zijn in dit laatste geval de prijzen van X en Y? Wel, we hebben nu

$$\begin{array}{l} \text{de gelijkheden } 9X + 6Y = 950 \\ \phantom{\text{de gelijkheden }} 5X + 8Y = 950 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{wuv } Y = 2X \text{ en wel } X = f \frac{950}{21} \\ Y = f \frac{21}{1900} . \end{array} \right.$$

De som van beide is $\frac{2850}{21}$.

Nu is $f 178,43$, d.i. de som van de prijzen van X en Y in de optimale situatie, verminderd met $\frac{2850}{21}$ gelijk aan $(3 \times 598): 42$.

De som van de schaduwprijzen in de situatie 2A, 6B, 2C, 2D, winst $f 6298$ zal dus zijn $f 178,43 - \frac{2 \times 598}{42} = f 149,95$, hetgeen overeenkomt met de som van de prijzen die Boomsma vond. Zoals al eerder is uiteengezet, hechten wij geen waarde aan deze prijzen. Voor het nemen van beslissingen dient men uit te gaan van de prijzen in de optimale situatie, en wel van $X = f 73,86$ en $Y = f 104,57$.

Met een kunstgreep is het mogelijk toch schaduwprijzen in het tussengeval te bepalen en wel door twee nevenvoorwaarden op te nemen, die dwingend aangeven in welke verhouding A, B, C en D dienen te worden geproduceerd.

Nemen we de restricties $2h_a - h_c - h_d = 0$ en $2h_b - 3h_c - 3h_d = 0$ op, dan vinden we $Y = 2X$, derhalve $X = f 49,98$ en $Y = f 99,97$.

6 Bij vaste kosten van $f 1260$ per periode, hetgeen neerkomt op $f 5,-$ per uur voor machine X en $f 25$ voor Y, zijn de netto winsten voor C en D hoger dan voor A en B. Niemand zal eraan twifelen, dat bij produktie van één artikel aan C of D de voorkeur wordt gegeven boven A of B. Voor deze beslissing is kennis van de integrale kostprijs niet nodig: de vaste kosten staan vast. Het gaat erom het verschil tussen opbrengst en variabele kosten zo groot mogelijk te doen zijn. Het artikel met de relatief laagste variabele kosten wordt geproduceerd. Verschil met de knelpuntscalculatie is er niet, want bij onderbezetting van de produktie-installaties zijn de schaduwprijzen nul.

We vergelijken immers: variabele kosten + schaduwprijzen $\times$ aantal uren verminderd met de opbrengst. Wil men echter verscheidene artikelen vervaardigen, die alle beslag leggen op een aantal machines dan worden bij het opstellen van het optimale produktieplan de aantallen te produceren artikelen en de schaduwprijzen (de bruto-winst per eenheid van de knelpuntsfactor) simultaan bepaald. Uiteraard ligt de nettowinst dan ook vast.

In het voorbeeld hebben we gezien, dat het vervaardigen van 1 eenheid D $f \frac{1791}{7}$ verlies zou opleveren. Zou men bij het gegeven produktie-programma van 6 A en 18 B een offerte willen uitbrengen voor het vervaardigen van D dan dient de opbrengstprijz minstens $f \frac{1791}{7}$ hoger te zijn, indien men hetzelfde winstpeil wenst te handhaven.

Immers: variabele kosten D	:	f 2675	
5 u X à f 73,86	:	f 369,30	
8 u Y à f 104,57	:	f 836,56	
Samen		<u>f 3880,86</u>	Stel aanbodprijs op f 3885 per stuk

De op basis van de standaardkostprijs bepaalde prijs zou het winstpeil zeker hebben doen dalen.

Het is onjuist, zoals Ankum en Koenders doen, het verschil tussen de methode van de integrale kostprijsberekening en de knelpuntscalculatie af te doen met een verwijzen naar een „buyer's market” en een „sellers' market”. Ook al zou er een periode van onderbezetting zijn van het produktie-apparaat dan nog kan een of ander produktiemiddel zich in een schaarste-positie bevinden. Het is n.m.m. veeleer zo dat bij de op de leer van de vervangingswaarde stoelende kostprijsberekening onvoldoende of in het geheel geen aandacht wordt geschonken aan het bepalen van een produktie- of verkoopplan.