

DE TOEPASSING VAN HET INTERNE RENTEVOET-CRITERIUM EN ZIJN RELATIE TOT DE PAYBACKTIJD

door Drs. G. G. J. M. Poeth en Prof. Dr. B. M. S. van Praag

De paybackperiode als hulpmiddel bij de investeringsselectie mag zich de laatste tijd verheugen in een hernieuwde belangstelling.

Weingartner [14], Sarnai en Levy [11] en Eijgenhuijsen [4] besteden veel aandacht aan de merites van de paybackperiode in zijn functies van besliscriterium en randvoorwaarde.

In aansluiting hierop zal worden aangetoond dat het bestaan van een paybackperiode een *voldoende* voorwaarde is voor het bestaan van een unieke interne rentevoet. Dit laatste is door ons ook onderzocht voor de niet-conventionele of niet-enkelvoudige projecten. Hiervoor is een generalisatie van de paybackperiode nodig. Voorts is voor niet-enkelvoudige projecten, waarvoor geen paybackperiode valt te definiëren, het bestaan van de interne rentevoet onderzocht.

Wij hebben ons aangesloten bij de ideeën van D. Teichroew, A. A. Robichek en M. Montalbano [13]. Het verschil tussen hun benadering en de onze is, dat wij geen enkele eis stellen aan de vorm van de cashflow van het investeringsproject. Een recept voor de toepassing van de interne rentevoet voor de acceptatie/verwerpingsbeslissing van alle soorten investeringsprojecten wordt hier behandeld.

1. Inleiding

Bij de beoordeling van investeringsprojecten identificeert men deze met een rij van cashflow's ($a_0, a_1, \dots, a_T$). In dit artikel wordt ervan uitgegaan dat de berekening der cashflow's zelf geen probleem vormt, ze worden gegeven verondersteld. In de theorie der investeringsselectie kent men, onder de veronderstelling van een perfecte kapitaalmarkt en onder veronderstelling van volledige zekerheid, twee problemen.¹⁾

Het eerste is de beoordeling van een project op zijn winstgevendheid. Het tweede probleem is de keuze tussen twee elkaar uitsluitende, winstgevende projecten. In dit artikel zullen we ons bezig houden met de vraag of het interne rentevoet criterium geschikt is om het eerste probleem op te lossen. Elders is aangetoond dat op basis van het interne rentevoet-criterium geen

¹⁾ Een derde probleem is de keuze van investeringsprojecten onder de restrictie van een beperkte hoeveelheid aan te wenden kapitaal. Dit probleem wordt samen met de eerste twee genoemd in het artikel „Three Problems in Rationing Capital”, *Journal of Business*, 28 oktober 1955 van J. H. Lorie en L. J. Savage.

Dit derde probleem is strijdig met de veronderstelling van een perfecte kapitaalmarkt. Op deze kapitaalmarkt kan men namelijk ongelimiteerde hoeveelheden geld verkrijgen tegen een vast rentepercentage.

uitspraak gedaan kan worden omtrent het tweede probleem.²⁾ Bij de interne rentevoetmethode zoekt men naar positieve wortels i van de vergelijking:

$$(1.1) \quad NCW(i) = \sum_{t=0}^T \frac{a_t}{(1+i)^t} = 0$$

In het geval dat - naast een nog hierna te bespreken eis (het project dient zuiver te zijn) - deze vergelijking slechts één niet-negatieve reële wortel heeft, zeg i^* , noemt men deze i^* de *interne rentevoet* van het investeringsproject $(a_0, a_1, \dots, a_T)$. Het criterium is dan: acceptatie van het project indien de interne rentevoet groter of gelijk is aan de marktrente en verwerping van het project indien de interne rentevoet kleiner is dan de marktrente. We zullen nu de vraag bezien of er voor alle investeringsprojecten een interne rentevoet te berekenen is. Het bestaan van deze interne rentevoet is afhankelijk van de vorm van de veelterm $NCW(i)$ en meer in het bijzonder van de afwisseling van de negatieve en positieve cashflow's, de coëfficiënten van deze veelterm. In het eenvoudigste geval heeft men in het eerste jaar een uitgave en in de volgende jaren opbrengsten tot de levensduur verstreken is, bv. het cashflow-tekenpatroon $(-, +, +, +, \dots)$. Ingewikkelder patronen kunnen echter voorkomen.

Een bekend voorbeeld is het grindaafgravingsproject.³⁾ Bij dit project dient de afgraving aan het eind van de levensduur weer in een landschappelijk aantrekkelijke staat te worden gebracht hetwelk hoge kosten met zich bracht. Dit geeft het patroon van cashflow-tekens $(-, +, +, +, -)$. In de scheepvaart⁴⁾ komt het voor dat een schip om de zoveel tijd weer op de helling moet voor een groot onderhoud. Dit kan aanleiding geven tot het volgende patroon $(-, +, +, +, -, +, +, +, -, +, +, +)$. Nog ingewikkelder patronen kunnen voorkomen, zelfs het geval waarin een project met een positieve cashflow begint, willen we niet uitsluiten⁵⁾ $(+, -, +, +, +)$, een situatie waarin vóór de betaling van de investering reeds een opbrengst ontvangen is. Naar aanleiding van het tekenverloop der cashflow's zullen we de projecten indelen in enkelvoudige investeringsprojecten en niet-enkelvoudige investeringsprojecten.

Een *enkelvoudig* investeringsproject is dan een project, waarbij alle negatieve cashflow's aan de positieve cashflow's voorafgaan.⁶⁾

²⁾ Voorbeelden van verschillen in beslissingen voor wederzijds elkaar uitsluitende projecten tengevolge van de NCW en de IRR zijn onder andere te vinden bij J. Hirshleifer [5]. Ruizendaal [10] bespreekt een variant: de interne rentevoet niet toegepast op de projecten zelf maar op de incremental cashflow, welke methode de goede beslissing geeft, zie [5]. Hierbij zal zich vaak het probleem voordoen van „multiple rates”.

Bierman en Smidt [1] geven een oplossingswijze aan voor deze laatste methode wanneer er meer dan twee elkaar uitsluitende projecten zijn.

³⁾ Zie Ruizendaal, N. L. „De Interne Rentevoet”, *MAB*, februari 1969.

⁴⁾ Zie Van Herwijnen, E. en Poeth, G. G. J. M. „Toepassing van een Disconteringsmethode ter Bepaling van de Minimale Vrachtprijs in de Scheepvaart”, *Maandblad Bedrijfskunde*. (1969).

⁵⁾ Teichroew, Robichek en Montalbano noemen een dergelijk project een financieringsproject. Bij deze indeling zullen we ons niet aansluiten omdat de aard van een project - investering of financiering - niet het gevolg is van het teken van de eerste cashflow. Een volledig willekeurig tekenverloop kan ontstaan bij toepassing van de „incremental cashflow”, zie [10].

⁶⁾ Teichroew, Robichek en Montalbano noemen een enkelvoudig project een project met slechts één negatieve cashflow gevolgd door enkel positieve cashflow's.

Een investeringsproject dat niet aan deze eis voldoet is een *niet-enkelvoudig* investeringsproject.⁷⁾

Er is nog een andere indeling mogelijk, nl. in projecten met een éénduidige paybacktijd en projecten zonder een éénduidige paybacktijd. De paybackperiode is een nu wel zeer verouderd beslissingscriterium. Hier zal de paybackperiode echter in een andere rol weer ten tonele worden gevoerd. De berekening van de paybackperiode is bij een enkelvoudig project eenvoudig. Men beschouwt de gecumuleerde cashflow:

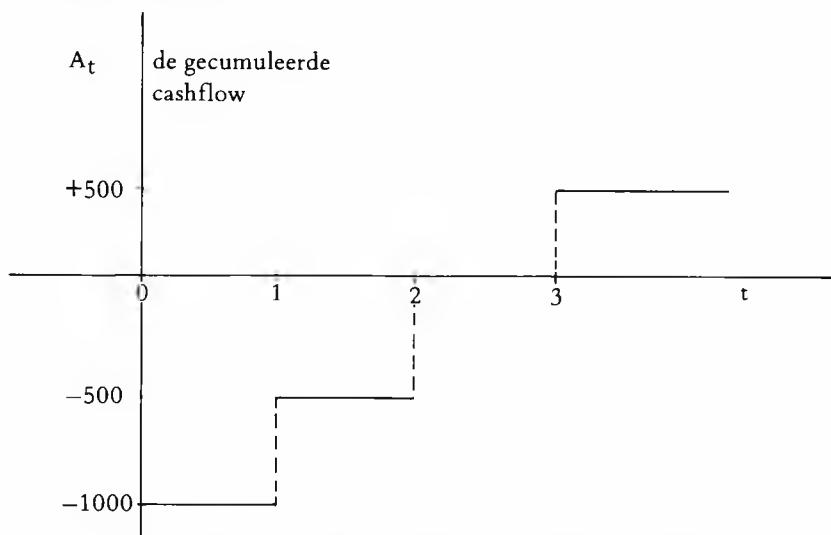
$$(1.2) \quad A_t = \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} \quad \text{voor } t=1, 2, \dots, T$$

en men gaat na, wanneer A_t voor het eerst positief wordt. De eerste waarde van t , zeg t_F , waarvoor geldt dat:

$$(1.3) \quad A_{t_F-1} < 0 \leq A_{t_F}$$

noemt men de *paybacktijd*.

Het criterium is dan: acceptatie van projecten waarvan de paybacktijd korter is dan een x aantal jaren. Bij keuze uit twee projecten kiest men het project met de kortste paybacktijd. Het criterium van de paybacktijd is eenvoudig te motiveren. De paybacktijd (afgezien van de financieringskosten) is de tijd waarin de investeringsuitgaven door het project worden terugverdiend. In figuur 1 is het verband aangegeven tussen de gecumuleerde cashflow A_t en de tijd voor het investeringsproject $(-1000, +500, +500, +500)$. De paybacktijd $t_F = 2$.



figuur 1. Het verband tussen de gecumuleerde cashflow A_t en de tijd voor het project $(-1000, +500, +500, +500)$.

⁷⁾ Ruizendaal noemt dit een niet-conventioneel project. Teneinde aansluiting te houden met de Amerikaanse literatuur kozen wij voor de term niet-enkelvoudig.

Aan deze methode kleven enkele belangrijke bezwaren:

- 1 Er wordt niet meer gelet op wat de cashflow is na de paybacktijd.
- 2 Er wordt geen rekening gehouden met de financieringskosten.

Een extra bezwaar komt nog te voorschijn wanneer we ook de niet-enkelvoudige projecten in onze beschouwingen betrekken. Voor deze projecten is het vaak zinloos de paybacktijd te berekenen. We zullen dit aantonen met twee voorbeelden. Het eerste voorbeeld is een schip dat halverwege zijn levensduur op de helling moet voor een onderhoudsbeurt, in die periode is de cashflow negatief. Het cashflow patroon is: $(-1000, +1500, -600, +1000)$.

Het tweede voorbeeld is de zandafgraving waarbij men op het eind het terrein weer in redelijke staat moet opleveren. Het cashflow patroon is: $(-1000, +1200, +1200, -1300)$.

Voor het eerste voorbeeld kan men twee paybackperiodes berekenen waarvoor geldt: $A_{t-1} < 0 \leq A_t$, nl. de periode $t=1$ en de periode $t=3$.

Welke periode is nu de paybacktijd?

Om de paybackperiode te gebruiken dient de t_F minstens éénduidig te zijn. Ook wanneer er slechts één t_F is, zoals bij project twee kan toch de paybackperiode een zinloos cijfer zijn, omdat na periode 1, de paybacktijd, er nog een belangrijke investering valt. Voor een zinvol gebruik van het paybackcriterium is het gewenst dat de investeringen binnen de paybacktijd vallen. Wanneer we deze eis stellen, impliceert dit dat ook voor winstgevende projecten wel eens geen paybacktijd kan worden gedefinieerd. Voor het zandafgravingsproject is er bv. geen moment waarop de ondernemer kan zeggen dat hij er uitgesprongen is, omdat er in de laatste periode een belangrijke betalingsverplichting is, hoe winstgevend het project op zichzelf ook mag zijn. We zullen slechts dan van een paybacktijd t_F spreken, wanneer er één en slechts één t_F bestaat waarvoor:

$$(1.4) \quad A_{t_F-1} < 0 \leq A_{t_F} \text{ en}$$

$$(1.5) \quad a_t \geq 0 \text{ voor alle } t \geq t_F$$

waarbij: $A_t = \sum_{\tau=0}^t a_\tau$

We kunnen nu de investeringsprojecten indelen in projecten mét een éénduidige paybacktijd en projecten zónder een éénduidige paybacktijd. Hierbij kunnen we opmerken dat projecten met een éénduidige payback, hoewel ze niet enkelvoudig behoeven te zijn, toch min of meer conventioneel van karakter zijn, in die zin, dat er eerst geld in het project gestoken wordt en dat, wanneer het project zichzelf heeft terugbetaald, er nog slechts positieve cashflow's kunnen volgen.

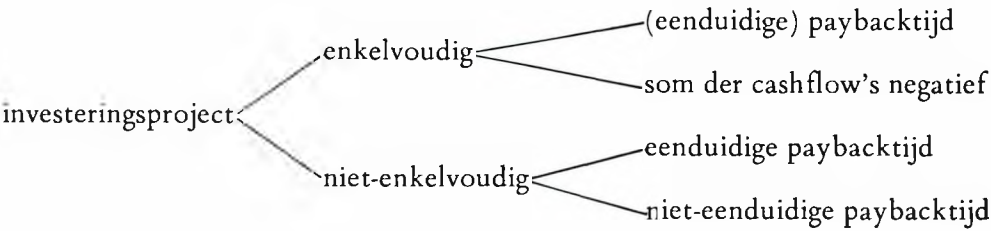
Dit leidt tot de volgende twee indelingen van investeringsprojecten:

- 1 De indeling in enkelvoudige en niet-enkelvoudige investeringsprojecten.
- 2 De indeling in projecten met en zonder een éénduidige paybacktijd.

Nu is eenvoudig in te zien dat enkelvoudige projecten altijd, of een éénduidige paybacktijd hebben (het omgekeerde geldt niet), of een som der

cashflow's hebben die negatief is. Het zal blijken dat het bestaan van een (éénduidige) paybacktijd voor enkelvoudige projecten een *noodzakelijke* en *voldoende* voorwaarde is voor het bestaan van een niet-negatieve reële interne rentevoet.

Niet-enkelvoudige projecten zijn in te delen in projecten met en zonder een éénduidige paybacktijd. Hier geldt dat het bestaan van een éénduidige paybacktijd een voldoende voorwaarde is voor het bestaan van een niet-negatieve interne rentevoet. Bovengenoemde indeling is schematisch weergegeven in figuur 2.



figuur 2. Indeling der investeringsprojecten.

Tenslotte dienen we nog een begrip te introduceren, hetwelk van groot belang is voor de goede interpretatie en evaluatie van de interne rentevoet. Dit is het begrip: een *zuiver* investeringsproject. De interne rentevoet is gedefinieerd als die waarde i , waarvoor

$$NCW(i) = \sum_{t=0}^T \frac{a_t}{(1+i)^t} = 0$$

Noem deze $i = i^*$. De interne rentevoet heeft de interpretatie van de *maximale* rentevoet die men zou kunnen betalen zonder verlies te lijden op het project. Deze interne rentevoet wordt berekend onafhankelijk van de marktrente.

Nu is een investeringsproject *zuiver* indien het project gedurende de rit slechts gebruik maakt van het rentepercentage (dat gelijk is aan de interne rentevoet) in de gedaante van een *kosten*percentage en niet als een *opbrengst*percentage. De interne rentevoet heeft geen betekenis voor investeringsprojecten, waarbij men gedurende de rit geconfronteerd wordt met tijdelijk braakliggende gelden die op de markt dienen te worden uitgezet. In zulke gevallen zou men wel de formule kunnen toepassen met bv. $i^* = 30\%$, maar het zou ondenkbaar zijn dat voor braakliggende gelden die tijdelijk worden uitgezet een dergelijke rentevergoeding kan worden geïncasseerd. We zullen dit met enkele voorbeelden verduidelijken. Beschouw de projecten $P(-1000, +500, +500, +702)$ en $Q(-1000, +1700, -780, +338)$.

Voor deze voorbeelden is de amortisatie berekend bij dat rentepercentage i^* , waarbij $NCW(i^*) = 0$.

Deze amortisatie is weergegeven in tabel 1.

i^*	proj. P 30%	proj. Q 30%	periode
cashflow	-1000	-1000	
interest	- 300	- 300	
geïnvesteed aan het eind periode 0	-1300	-1300	0
cashflow	+ 500	+1700	
projectsaldo	- 800	+ 400	
interest	- 240	+ 120	1
geïnv./herbelegd eind periode 1	-1040	+ 520	
cashflow	+ 500	- 780	
projectsaldo	- 540	- 260	
interest	- 162	- 78	2
geïnvesteed eind periode 2	- 702	- 338	
cashflow	+ 702	+ 338	
	0	0	

Tabel 1. Amortisatie project P en project Q.

Bij vergelijking van project P en Q blijkt dat bij de amortisatie van project P de interne rentevoet *slechts* in zijn gedaante van kostenpercentage voorkomt. Bij project Q is het evenwel nodig om in periode 1 400 te herbeleggen tegen 30%. Project P is een *zuiver* investeringsproject. Hier is de interne rentevoet het maximale kostenpercentage dat vanuit het project kan worden opgebracht, en dit rentepercentage is werkelijk *intern* omdat het onafhankelijk is van de marktrente.

Project Q is een *niet-zuiver* of *gemengd* project, omdat het maximale kostenpercentage dat vanuit het project kan worden opgebracht alleen 30% is, wanneer bij herbelegging van overtollige saldi ook een opbrengstpercentage van 30% behaald kan worden. Hier is het rentepercentage i^* niet onafhankelijk van de kapitaalmarkt (er is afhankelijkheid van het rentepercentage dat ontvangen kan worden bij herbelegging) en kan dus dit rentepercentage niet de interpretatie hebben van een interne rentevoet.

Bij het amortisatievoorbeeld hebben we het begrip *projectsaldo* geïntroduceerd. Het *projectsaldo* is het bedrag waarover rente wordt berekend. De mathematische definitie is:

$$(1.6) \quad PS_0 = a_0$$

$$(1.7) \quad PS_t = \sum_{\tau=0}^t (1+i)^{t-\tau} a_{\tau}$$

Het is nu mogelijk een formele definitie te geven van een zuiver investeringsproject. Gegeven is het cashflowpatroon $(a_0, a_1, \dots, a_T)$ van een investeringsproject. Het project is *zuiver* indien:

$$(1.8) \quad PS_t = \sum_{\tau=0}^t a_{\tau}(1+i^*)^{t-\tau} \leq 0 \quad \text{voor alle } t, \text{ bij die } i^*, \text{ waarbij } NCW(i^*) = 0.$$

Wanneer het project niet voldoet aan deze definitie, is het project *niet-zuiver* of *gemengd*.

Het zal duidelijk zijn dat een investeringsproject zuiver dient te zijn, wil er op zinvolle wijze gebruik gemaakt kunnen worden van de interne rentevoet.

Een andere eis waaraan dit criterium dient te voldoen is, dat er ten hoogste één reële niet-negatieve wortel bestaat voor de vergelijking $NCW(i) = 0$, en niet bv. twee of drie positieve wortels.

In het algemeen zal men niet geïnteresseerd zijn in projecten die een negatieve wortel hebben. Bij simulatiestudies⁸⁾ wenst men echter vaak de frequentieverdeling van de interne rentevoet te zien over de gehele reële as. Derhalve is in hoofdstuk 6 als generalisatie onderzocht de situatie waarin er slechts één wortel i^* bestaat die groter is dan -100% ($i^* > -1$).

In dit artikel zal onderzocht worden of het interne rentevoet-criterium geschikt is om gebruikt te worden bij de beslissing acceptatie of verwerping van een project onder de veronderstellingen van een perfecte kapitaalmarkt en volledige zekerheid.

In hoofdstuk 2 gebeurt dit voor enkelvoudige projecten. In hoofdstuk 3 voor projecten met een éénduidige paybacktijd. In hoofdstuk 4 worden niet-enkelvoudige projecten zonder een éénduidige paybacktijd bekeken. Met name zal hier aandacht worden besteed aan het probleem van meerdere reële niet-negatieve wortels.

In hoofdstuk 5 zullen we laten zien hoe de moderne literatuur⁹⁾ de interne rentevoet probeert te redden met behulp van de gegeneraliseerde rentevoet.

In hoofdstuk 6 zullen we aandacht besteden aan negatieve interne rentevoeten.

In hoofdstuk 7 wordt een overzicht gegeven van de eigenschappen van het interne rentevoet-criterium.

De conclusie is dat voor enkelvoudige projecten en voor niet-enkelvoudige projecten met een éénduidige paybacktijd de interne rentevoet een geschikt criterium is om te gebruiken bij de beslissing acceptatie of verwerping van een project onder de veronderstelling van een perfecte kapitaalmarkt en volledige zekerheid.

Bij niet-enkelvoudige projecten zonder een éénduidige paybacktijd kan toepassing van de interne rentevoet problemen geven.

Niet alleen is er dan de mogelijkheid dat er meerdere wortels zijn voor de vergelijking $NCW(i) = 0$, waarbij het probleem zich voordoet of een van deze wortels aan te merken is als de interne rentevoet. Maar ook als er slechts één unieke wortel is, is het toch de vraag of deze wortel aangemerkt kan worden als de interne rentevoet.

Voor deze klasse van projecten dient de gegeneraliseerde interne rentevoet

⁸⁾ Zie bv. Hertz D. V., „Risk Analysis in Capital Investment”, *Harvard Business Review*, Jan.-Feb. 1964.

⁹⁾ Wij sluiten ons hierbij aan bij de ideeën van Teichroew, Robichek en Montalbano.

te worden berekend. Deze gegeneraliseerde interne rentevoet is gedefinieerd als het maximale rentekostenpercentage r^* dat men zou kunnen betalen over negatieve projectsaldi zonder verlies te leiden op het project. Over eventuele positieve projectsaldi wordt dan een renteopbrengst ontvangen. Het percentage dat men gebruikt om renteopbrengsten te berekenen is gelijk aan de marktrente.

De gegeneraliseerde interne rentevoet r^* is dat rentekostenpercentage waarvoor bij gegeven renteopbrengstpercentage, k , de gegeneraliseerde netto contante waarde gelijk aan nul is.

$$(1.9) \quad NCW(r^*, k) = 0$$

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor (1.9) is dat de netto toekomstige waarde nul is

$$(1.10) \quad NTW(r^*, k) = 0$$

De netto toekomstige waarde is gelijk aan het projectsaldo aan het eind van de levensduur, T , van een project. Voor elke r en k is

$$(1.11) \quad NTW(r, k) = PS_T(r, k)$$

$PS_T(r, k)$ is voor gegeven r en k te berekenen via de volgende methode

$$(1.12) \quad PS_0(r, k) = a_0$$

en

$$(1.13) \quad \begin{aligned} PS_t(r, k) &= (1+k)PS_{t-1}(r, k) + a_t && \text{als } PS_{t-1}(r, k) \geq 0 \\ &= (1+r)PS_{t-1}(r, k) + a_t && \text{als } PS_{t-1}(r, k) < 0 \end{aligned}$$

Door *trial* en *error* dient men die r te zoeken waarvoor $PS_T(r, k) = 0$ om de gegeneraliseerde interne rentevoet te kennen.

Tenslotte is in par. 7 een volledige receptuur gegeven voor de berekening van een (eventueel gegeneraliseerde) interne rentevoet van elk willekeurig investeringsproject.

2. Enkelvoudige projecten

In hoofdstuk 1 is een indeling gemaakt in enkelvoudige en niet-enkelvoudige investeringsprojecten. Enkelvoudige projecten zijn projecten met slechts één tekenwisseling in de rij der cashflow's ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_T$) en wel van negatief naar positief. De interne rentevoet van een investeringsproject is gedefinieerd als die rentevoet $i^* \geq 0$, waarvoor:

$$(2.1) \quad NCW(i^*) = \sum_{t=0}^T \frac{a_t}{(1+i^*)^t} = 0$$

Voor een zinvolle interpretatie dient i^* uniek te zijn en het project zuiver. In

stelling 1 wordt aangetoond dat een enkelvoudig project een positieve interne rentevoet heeft, wanneer er een paybackperiode bestaat. In stelling 2 wordt bewezen dat een enkelvoudig project een zuiver project is.

Stelling 1. Wanneer een enkelvoudig investeringsproject een paybackperiode heeft, is er juist één $i^* \geq 0$, waarvoor (2.1) geldt. Wanneer een enkelvoudig investeringsproject geen paybackperiode heeft, is er juist één $i^* \geq -1$, waarvoor (2.1) geldt. Voor $i < i^*$ is $NCW(i) > 0$. En voor $i > i^*$ is $NCW(i) < 0$.

Bewijs:

$$(2.2) \quad NCW(i) = a_0 + a_1 (1+i)^{-1} + \dots + a_T (1+i)^{-T}$$

$NCW(i)$ is een continue functie van i . Volgens de definitie van een enkelvoudig investeringsproject is er dan een periode n waarvoor geldt:

$$(2.3) \quad a_{n-1} \leq 0 < a_n \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} a_t \leq 0 \text{ voor alle } t < n \\ a_t \geq 0 \text{ voor alle } t > n \end{array}$$

Voor $i \rightarrow \infty$ is, omdat $a_0 < 0$, $NCW(i) < 0$.

Voor $i = 0$ is, omdat er een paybacktijd is:

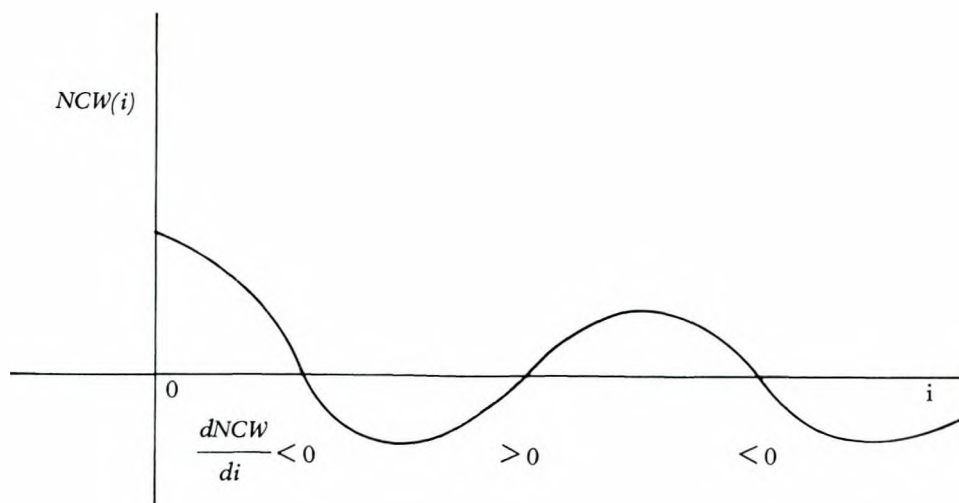
$$\sum_{t=0}^T a_t \geq 0, \text{ d.w.z. } NCW(i=0) \geq 0.$$

Voor $i \rightarrow -1$ is, omdat $a_T > 0$, $NCW(i) > 0$.

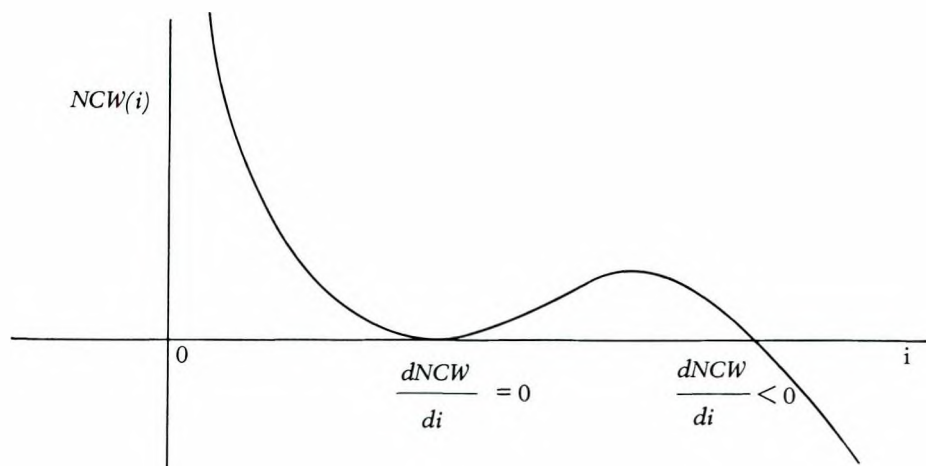
Uit de continuïteit volgt dat er *tenminste* één wortel $i^* \geq 0$ is waarvoor $NCW(i) = 0$. We moeten nu nog aantonen, dat er ten hoogste één wortel i^* is waarvoor $NCW(i) = 0$. We tonen dit aan door te bewijzen dat de functie $NCW(i)$ de i -as altijd moet snijden onder een negatieve hoek, d.w.z.:

$$\frac{dNCW(i)}{di} < 0 \text{ voor } i = i^*$$

Dat dit een voldoende voorwaarde is voor het bestaan van slechts één wortel ziet men gemakkelijk uit figuur 3 en figuur 4, waar situaties met meerdere wortels geschetst zijn.



figuur 3. Het verband tussen de NCW en de disconteringsvoet i voor een project met meerdere wortels.



figuur 4. Het verband tussen de NCW en de disconteringsvoet i voor een project met samenvallende wortels

We bezien eerst de situatie $a_0 < 0$ en $a_1, \dots, a_T \geq 0$. Er geldt:

$$(2.4) \quad \frac{dNCW(i)}{di} = -\frac{a_1}{(1+i)^2} - 2\frac{a_2}{(1+i)^3} \dots - T\frac{a_T}{(1+i)^{T+1}}$$

Nu is (2.4) kleiner dan nul ($i > -1$).

We beschouwen nu het geval dat $a_0 < 0$ en $a_1 < 0$ en $a_2, \dots, a_T \geq 0$. Nog steeds geldt dan de vergelijking (2.4). Bovendien is $NCW(i^*) = 0$, waaruit volgt:

$$(2.5) \quad \frac{1}{(1+i^*)} NCW(i^*) = \frac{a_0}{(1+i^*)} + \frac{a_1}{(1+i^*)^2} + \dots + \frac{a_T}{(1+i^*)^{T+1}} = 0$$

Optelling van beide vergelijkingen in het punt $i = i^*$ levert:

$$(2.6) \quad \left[\frac{dNCW(i)}{di} \right]_{i=i^*} + \frac{NCW(i^*)}{(1+i^*)} = \frac{a_0}{(1+i^*)} - \frac{a_2}{(1+i^*)^3} - 2 \frac{a_3}{(1+i^*)^4} - \dots - \frac{(T-1)a_T}{(1+i^*)^{T+1}}$$

$< 0 \qquad \leq 0 \qquad \leq 0$

De uitdrukking in het rechterlid van (2.6) is negatief en daar $NCW(i^*) = 0$, is dus $\frac{dNCW}{di}$ in het punt $i = i^*$ kleiner dan nul ($i^* > -1$).

In het geval van meerdere negatieve cashflow's (zeg n), is het bewijs gemakkelijk te generaliseren. Analoog aan (2.6) construeren we de vergelijking:

$$(2.7) \quad \left[\frac{dNCW(i)}{di} \right]_{i=i^*} + n \frac{NCW(i^*)}{(1+i^*)} = n \frac{a_0}{(1+i^*)} + (n-1) \frac{a_1}{(1+i^*)} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(1+i^*)} - \frac{a_{n+1}}{(1+i^*)^{n+2}} - 2 \frac{a_{n+3}}{(1+i^*)^{n+3}} \dots$$

waaruit weer volgt:

$$(2.8) \quad \left[\frac{dNCW(i)}{di} \right]_{i=i^*} < 0 \quad (i^* > -1)$$

Stelling 2. Een enkelvoudig investeringsproject is een zuiver project.

Bewijs: We veronderstellen dat in de eerste n perioden de cashflow's a_0 t/m a_n kleiner of gelijk aan nul zijn ($a_t \leq 0$ voor $t \leq n$ met $a_0 < 0$ en $a_n < 0$) en de daaropvolgende cashflow's groter of gelijk aan nul zijn ($a_t \geq 0$ voor $t > n$ en $a_T > 0$).

Nu is voor $i = i^*$:

$$(2.9) \quad NCW(i^*) = 0$$

Het verband tussen NCW en het projectsaldo op tijdstip T is:

$$(2.10) \quad PS_T(i^*) = (1+i^*)^T NCW(i^*) = 0$$

hetgeen ook geschreven kan worden als:

$$(2.11) \quad PS_T(i^*) = (1+i^*)^T \sum_{t=0}^{T-1} \frac{a_t}{(1+i^*)^t} + a_T = 0$$

Omdat gegeven is dat $a_T > 0$ is:

$$(2.12) \quad (1+i^*)PS_{T-1}(i^*) = PS_T(i^*) - a_T < 0$$

en voor $i^* > -1$ is:

$$(2.13) \quad PS_{T-1} < 0$$

Dit kan zo worden voortgezet voor alle perioden waarin $t > n$. Voor de perioden met negatieve cashflow $t \leq n$ geldt:

$$(2.14) \quad PS_0 = a_0 < 0$$

$$PS_1 = (1+i^*)PS_0 + a_1 < 0$$

$\vdots$

$$PS_n = (1+i^*)PS_{n-1} + a_n < 0$$

Als conclusie kunnen we stellen dat voor elke periode $t < T$ geldt dat $PS_t < 0$, behalve voor een periode $t = T$, waarvoor geldt dat $PS_T = 0$. Het enkelvoudige investeringsproject is een zuiver investeringsproject voor $i^* > -1$ en dus zeker voor $i^* \geq 0$.

3. Projecten met een éénduidige paybacktijd

In hoofdstuk 1 hebben we niet-enkelvoudige investeringsprojecten ingedeeld in projecten mét en zónder een éénduidige paybacktijd. Een investeringsproject heeft een éénduidige paybacktijd wanneer er één en slechts één tijdstip t_F bestaat, waarvoor:

$$(1.4) \quad A_{t_F-1} < 0 \leq A_{t_F} \quad \text{en}$$

$$(1.5) \quad a_t \geq 0 \quad \text{voor alle } t \geq t_F$$

waarbij: $A_t = \sum_{\tau=0}^t a_\tau$

In stelling 3 zal worden bewezen dat een niet-enkelvoudig project met een éénduidige paybacktijd slechts één wortel i^* heeft waarvoor $NCW(i^*) = 0$. In stelling 4 zal worden bewezen dat een project met een éénduidige paybacktijd altijd een zuiver investeringsproject is. Het gevolg van deze twee stellingen is, dat zonder bezwaar de interne rentevoet gebruikt kan worden voor projecten met een éénduidige paybacktijd.

Stelling 3. Wanneer een niet-enkelvoudig project een éénduidige paybacktijd heeft, is er slechts één wortel i^* waarvoor $NCW(i^*) = 0$.

Voor het bewijs van stelling 3 bewijzen we eerst de volgende hulpstelling:

Lemma 1. Indien gegeven is dat:

$$(3.1) \quad \sum_{\tau=0}^t a_\tau < 0 \quad \text{voor alle } t < t_F \quad \text{dan geldt voor } w > 1:$$

$$(3.2) \quad \sum_{\tau=0}^t a_\tau w^{T+1-\tau} < 0 \quad \text{voor alle } t < t_F$$

Bewijs Lemma 1.

Het bewijs wordt geleverd met behulp van inductie. Indien $a_0 < 0$, dan geldt:

$$(3.3) \quad a_0 w^{T+1} < 0 \quad (w > 1)$$

De som der eerste twee termen is

$$(3.4) \quad a_0 w^{T+1} + a_1 w^T = w^T (a_0 w + a_1)$$

Nu is voor $w > 1$:

$$(3.5) \quad w^T (a_0 w + a_1) < w^T (a_0 + a_1) < 0$$

Onze inductieveronderstelling is nu:

$$\sum_{\tau=0}^p a_{\tau} w^{T+1-\tau} < 0$$

De som van $p + 1$ termen is:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} a_0 w^{T+1} + a_1 w^T + \dots + a_{p+1} w^{T-p} = \\ w^{T-p} (a_0 w^{p+1} + a_1 w^p + \dots + a_p w + a_{p+1}) = \\ w^{T-p} \{ w(a_0 w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p) + a_{p+1} \} \end{aligned}$$

Nu geldt volgens de inductieveronderstelling:

$$(3.7) \quad a_0 w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p < 0$$

Wanneer $w > 1$ geldt de ongelijkheid:

$$(3.8) \quad w(a_0 w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p) < a_0 w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p < 0$$

waaruit voor (3.6) volgt:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} w^{T-p} \{ w(a_0 w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p) + a_{p+1} \} < \\ w^{T-p} \{ a_0 w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p + a_{p+1} \} = \\ w^{T-p} \{ w(a_0 w^{p-1} + \dots + a_{p-1}) + a_p + a_{p+1} \} \end{aligned}$$

Indien we dit proces nog $p-1$ maal herhalen, dan vinden we:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} a_0 w^{T+1} + a_1 w^T + \dots + a_p w^{T-p+1} + a_{p+1} w^{T-p} < \\ w^{T-p} \{ a_0 + a_1 + \dots + a_p + a_{p+1} \} \end{aligned}$$

Nu is gegeven dat $a_0 + a_1 + \dots + a_p + a_{p+1} < 0$ voor $p+1 < t_F$, waaruit volgt dat (3.10) kleiner is dan nul, waarmee deze hulpstelling is bewezen.

Na het bewijs van deze hulpstelling gaan we over tot het bewijs van stelling 3, waarin we bewijzen dat een project met een éénduidige payback één niet-negatieve wortel heeft voor de vergelijking $NCW(i) = 0$.

Bewijs. Uit de definitie van een eenduidige paybacktijd:

$$(1.4) \quad A_{t_F-1} < 0 \leq A_{t_F} \quad \text{en}$$

$$(1.5) \quad a_t \geq 0 \quad \text{voor alle } t \geq t_F, \text{ waarbij}$$

$$A_t = \sum_{\tau=0}^t a_\tau \quad \text{volgt:}$$

$$(3.11) \quad NCW(i=0) > 0$$

Omdat: $a_0 < 0$ is

$$(3.12) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} NCW(i) < 0$$

Uit de continuïteit volgt dat er *tenminste* één i^* bestaat waarvoor $NCW(i^*) = 0$. We zullen nu bewijzen dat er *slechts* één i^* is waarvoor $NCW(i^*) = 0$, door aan te tonen dat $\frac{dNCW}{di} < 0$ voor die i^* waarbij $NCW(i^*) = 0$.

Voor de bewijsvoering gaan we over op de eindwaarde, of netto toekomstige waarde NCW in het jaar $T+1$:

$$(3.13) \quad NTW_{T+1}(i) = (1+i)^{T+1} NCW(i)$$

Er geldt dan:

$$(3.14) \quad \frac{dNTW(i)}{di} = (T+1)(1+i)^T NCW(i) + (1+i)^{T+1} \frac{dNCW(i)}{di}$$

Nu geldt voor de afgeleide in het punt i^* (het punt i waar $NCW(i) = 0$)

$$(3.15) \quad \left[\frac{dNTW(i)}{di} \right]_{i=i^*} = (1+i)^{T+1} \left[\frac{dNCW(i)}{di} \right]_{i=i^*}$$

Dit betekent dat als $\frac{dNTW(i)}{di} < 0$ dat dan ook $\frac{dNCW(i)}{di} < 0$

$$(3.16) \quad NTW_{T+1}(i) = (1+i)^{T+1} a_0 + (1+i)^T a_1 + \dots + a_T(1+i)$$

Stel:

$$(3.17) \quad (1+i)=w$$

voor $i > 0$ is dan $w > 1$.

Substitutie van (3.17) in (3.16) geeft

$$(3.18) \quad NTW_{T+1}(w) = a_0 w^{T+1} + a_1 w^T + \dots + a_T w$$

Stel:

$$(3.19) \quad B_1 = \sum_{\tau=0}^{t_F-1} a_{\tau} w^{T+1-\tau}$$

$$(3.20) \quad B_2 = \sum_{\tau=t_F}^T a_{\tau} w^{T+1-\tau}$$

$$(3.21) \quad NTW_{T+1} = B_1 + B_2$$

Voor de eerste afgeleide van B_1 geldt:

$$(3.22) \quad \frac{dB_1}{dw} = (T+1)a_0 w^T + T a_1 w^{T-1} + \dots +$$

$$(T-t_F+2)a_{t_F-1} w^{T-t_F+1}$$

$$= (T-t_F+2) (a_0 w^T + a_1 w^{T-1} + \dots + a_{t_F-1} w^{T-t_F+1})$$

$$+ (a_0 w^T + a_1 w^{T-1} + \dots + a_{t_F-2} w^{T-t_F+2}) +$$

$$+ (a_0 w^T + a_1 w^{T-1} + \dots + a_{t_F-3} w^{T-t_F+3}) + \dots$$

$$+ (a_0 w^T + a_1 w^{T-1}) + a_0 w^T \quad \left. \vphantom{\frac{dB_1}{dw}} \right\} < 0$$

Door substitutie van de volgende vergelijking:

$$(3.23) \quad \frac{B_1}{w} = a_0 w^T + \dots + a_{t_F-1} w^{T-t_F+1}$$

en toepassing van lemma 1 in vergelijking (3.22) wordt bewezen dat:

$$(3.24) \quad \frac{dB_1}{dw} < (T-t_F+2) \frac{B_1}{w}$$

Voor de afgeleide van B_2 geldt dat:

$$(3.25) \quad \frac{dB_2}{dw} = (T-t_F+1)a_{t_F} w^{T-t_F} + \dots + a_T$$

Omdat alle $a_t \geq 0$ voor $t \geq t_F$ geldt:

$$(3.26) \quad \frac{dB_2}{dw} \leq (T-t_F+1)a_{t_F}w^{T-t_F} + \dots (T-t_F+1)a_T \\ = \frac{T-t_F+1}{w} B_2$$

In het snijpunt van de functie $NTW(w)$ met de w -as is $NTW(w) = 0$. In dit punt is dus $B_2 = -B_1$. Bovendien is $B_2 > 0$, omdat $a_t \geq 0$ voor $t \geq t_F$ en dus $B_1 < 0$.

Nu is:

$$(3.27) \quad \frac{dNTW}{dw} = \frac{dB_1}{dw} + \frac{dB_2}{dw}$$

Substitutie van (3.24) en (3.26) in (3.27) geeft

$$(3.28) \quad \frac{dNTW}{dw} < \frac{(T-t_F+2)B_1}{w} + \frac{(T-t_F+1)B_2}{w}$$

In het punt w^* waar $NTW(w^*) = 0$ geldt dat

$$(3.29) \quad \left[\frac{dNTW(w)}{dw} \right]_{w=w^*} < \frac{B_1}{w^*} < 0$$

Uit (3.15) volgt dan ook:

$$(3.30) \quad \left[\frac{dNCW}{dw} \right]_{w=w^*} < 0$$

waarmee de stelling is bewezen.

Stelling 4. Een investeringsproject met een éénduidige paybacktijd is een zuiver investeringsproject.

Bewijs: Ten behoeve van de bewijsvoering onderscheiden we de volgende twee intervallen $0 \leq t < t_F$ en $t_F \leq t \leq T$.

a. *Het interval $t_F \leq t \leq T$:*

Uit de definitie van de éénduidige paybacktijd volgt dat $a_T > 0$. Nu is:

$$(3.31) \quad PS(i^*)_T = (1+i^*)^T NCW(i^*) = 0$$

en omdat:

$$(3.32) \quad PS(i^*)_T = (1+i^*)PS_{T-1} + a_T$$

is ook:

$$(3.33) \quad PS(i^*)_{T-1} < 0$$

Omdat alle cashflows komend na de éénduidige paybacktijd t_F in ieder geval niet negatief zijn, geldt ook:

$$(3.34) \quad PS_t(i^*) < 0 \text{ voor } t_F \leq t < T$$

b. Het interval $0 \leq t < t_F$:

Voor elke $t < t_F$ geldt volgens Lemma 1 dat voor elke willekeurige $i \geq 0$

$$(3.35) \quad \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+i)^{\tau} < 0$$

en dan geldt (3.35) zeker voor $i=i^*$.

Uit het bewezene onder a. en b. volgt dat $PS_t(i^*) \leq 0$ voor $0 \leq t \leq T$, hetgeen te bewijzen was.

4. Niet-enkelvoudige projecten zonder een éénduidige paybacktijd.

Het probleem van de meerdere wortels

Na behandeling van het enkelvoudige investeringsproject en het niet-enkelvoudige investeringsproject met éénduidige payback, rest nog het probleem of we één interne rentevoet kunnen bepalen wanneer een project niet een éénduidige payback heeft.

In tabel 2 geven we enige voorbeelden van projecten zonder een éénduidige paybacktijd.

<i>tijdstip</i>	<i>project A</i>	<i>project B</i>	<i>project C</i>	<i>project D</i>
0	-1000	-1000	-1000	-1000
1	+2300	+3600	+3000	+1500
2	-1320	-4310	-2990	- 700
3		+1716	+ 990	+ 286

tabel 2. Enige projecten zonder éénduidige paybacktijd.

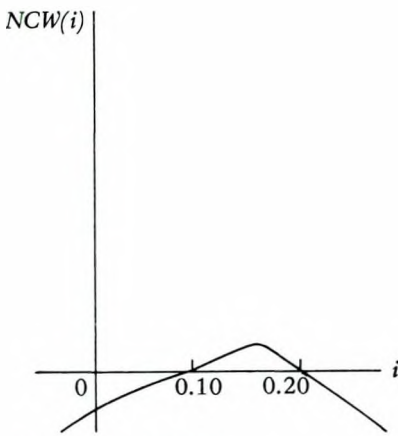
De (soms complexe) wortels van de vergelijking $NCW(i^*)=0$ vindt men voor de verschillende projecten in tabel 3, waarbij $i^2 = -1$.

<i>project A</i>	<i>project B</i>	<i>project C</i>	<i>project D</i>
+0.10	+0.10	-0.10	+ 0.10
+0.20	+0.20	0.00	$(2+i\sqrt{22})/10$
	+0.30	+0.10	$(2-i\sqrt{22})/10$

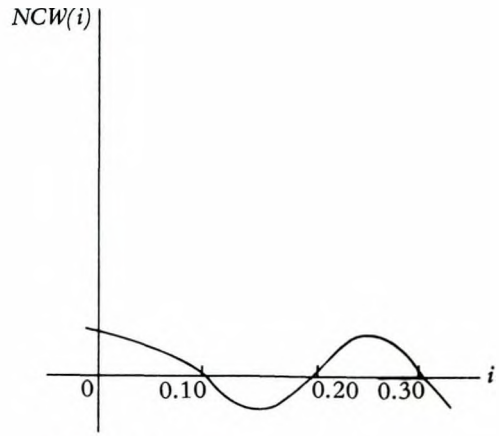
tabel 3. Wortels van de vergelijking $NCW(i^*)=0$.

Uit deze voorbeelden blijkt duidelijk dat, zelfs als we naar de niet-negatieve wortels kijken, het toch nog een open vraag is of we één wortel, en dan welke, als de interne rentevoet kunnen aanwijzen.

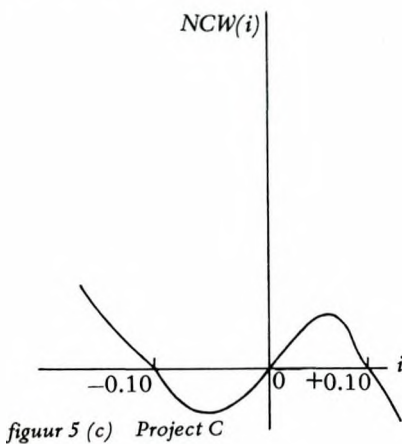
In figuur 5 (a. t/m d.) bezien we het gedrag van de NCW van de projecten A t/m D als functie van de discontovoet i .



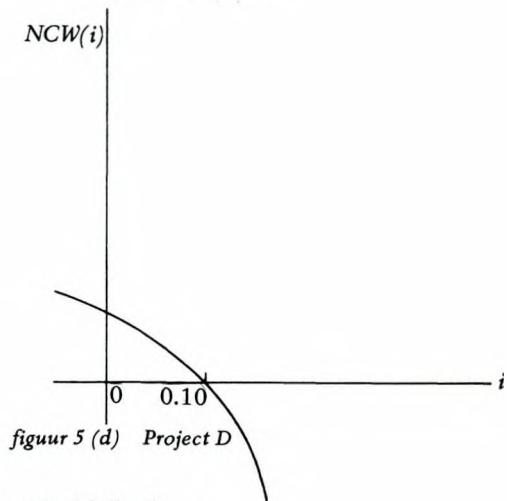
figuur 5 (a) Project A



figuur 5 (b) Project B



figuur 5 (c) Project C



figuur 5 (d) Project D

figuur 5. Het verband tussen i en $NCW(i)$ van het project A t/m D.

De interne rentevoet hebben we voorheen geïnterpreteerd als de maximale vergoeding die men voor aan te trekken kapitaal kan betalen zonder dat de contante waarde van het investeringsproject negatief wordt. Bezien we nu figuur 5 (a.) voor project A, dan zien we dat de wortel $i^* = 0.20$ wel de eigenschap heeft dat bij hogere geëiste rentevergoedingen de contante waarde van het project negatief wordt, maar niet voldoet aan de eis dat voor elke lagere rente het project voordelig is: is de disconteringsvoet lager dan 10% dan wordt de contante waarde weer negatief. Intuïtief is dit wel te verklaren wanneer we project A bezien, omdat de cashflow zowel aan het begin als aan het eind negatief is. Bij hoge discontovoeten overheerst de eerste cashflow (-1000), bij een zeer lage disconteringsvoet wrekt zich het feit dat er geen

payback is, en juist daartussen in ligt het gebied waarin de middelste cashflow overheerst. De harde conclusie die uit dit voorbeeld en ook uit de andere voorbeelden, waar sprake is van meerdere niet-negatieve reële wortels, getrokken kan worden, is dat de interne rentevoet hier niet meer kan dienen als een criterium voor de beoordeling van de winstgevendheid van een project.

5. De gegeneraliseerde interne rentevoet

In dit hoofdstuk zullen we bezien hoe men in de moderne literatuur het oude begrip van de „internal rate of return” redt. We hebben gezien dat de interne rentevoet van een investeringsproject niet van de actuele marktrente dient af te hangen wil het een echte interne rentevoet zijn. De interne rentevoet heeft dus alleen betekenis bij investeringsprojecten waarbij men niet gedurende de rit tijdelijk met braakliggende gelden wordt geconfronteerd die op de markt dienen te worden uitgezet. In zulke gevallen zou men wel de formule kunnen toepassen, zeg $i^* = 30\%$, maar het is ondenkbaar dat voor braakliggende gelden, die tijdelijk moeten worden uitgezet, een dergelijke rentevergoeding kan worden geïncasseerd. Wil de interne rentevoet zijn geldigheid als waarderingsmaatstaf voor projecten behouden, dan zullen we met de reële marktrente rekening moeten houden en zullen we moeten komen tot een gegeneraliseerde interne rentevoet, die *afhankelijk* is van de (externe) actuele marktrente. We zullen eerst enige voorbeelden van projecten bezien (in tabel 4) alsmede de amortisatieschema’s (tabel 5) van de projecten wanneer de marktrente gelijkgesteld wordt aan de wortel(s) van de vergl. $NCW = 0$.

<i>project A</i>	<i>project D</i>	<i>project F</i>	<i>project G</i>	<i>project H</i>	<i>t</i>
−1000	−1000	−1000	−1000	−1000	0
+2300	+1500	+ 500	+1700	+ 500	1
−1320	− 700	+ 500	− 780	− 200	2
	+ 286	+ 176	+ 338	+ 946	3

tabel 4. Enige voorbeelden van investeringsprojecten.

Van de projecten in tabel 4 is project F een enkelvoudig investeringsproject, project H een niet-enkelvoudig investeringsproject met een éénduidige paybacktijd en de projecten A, D en G zijn projecten zonder éénduidige paybacktijd. Van deze projecten zijn de reële wortels der vergelijking $NCW(i) = 0$, voor project A : $i^* = 0,10$ en $i^* = 0,20$; voor de projecten D, F en H : $i^* = 0,10$; voor project G is $i^* = 0,30$.

project	A	A	D	F	G	H	t
$i^* =$	0.10	0.20	0.10	0.10	0.30	0.10	
cashflow	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	0
interest	- 100	- 200	- 100	- 100	- 300	- 100	
Investering							
eind per. 0	-1100	-1200	-1100	-1100	-1300	-1100	1
cashflow	+2300	+2300	+1500	+ 500	+1700	+ 500	
projectsaldo	+1200	+1100	+ 400	- 600	+ 400	- 600	
interest	+ 120	+ 220	+ 40	- 60	+ 120	- 60	2
belegging/ invest. eind							
periode 1	+1320	+1320	+ 440	- 660	+ 520	- 660	
cashflow	-1320	-1320	- 700	+ 500	- 780	+ 200	3
projectsaldo	0	0	- 260	- 160	- 260	- 860	
interest			- 26	- 16	- 78	- 86	
investering							3
eind per. 2			- 286	- 176	- 338	- 946	
cashflow			+ 286	+ 176	+ 338	+ 946	
			0	0	0	0	

tabel 5. Amortisatie van de projecten A, D, F, G, H, bij de rentepercentages i^* waarvoor $NCW(i^*) = 0$.

Amortisatie is ook mogelijk, wanneer we rekening houden met twee rentepercentages nl. een rentekostenpercentage r en een rente-opbrengstpercentage k , welke percentages in een perfecte kapitaalmarkt aan elkaar gelijk zijn. Het projectsaldo op tijdstip $t = 0$ is:

$$(5.1) \quad PS_0 = a_0$$

en op tijdstip t is het projectsaldo

$$(5.2) \quad \begin{aligned} PS_t(r, k) &= (1+k)PS_{t-1} + a_t \quad \text{als } PS_{t-1} \geq 0 \\ PS_t(r, k) &= (1+r)PS_{t-1} + a_t \quad \text{als } PS_{t-1} < 0 \end{aligned}$$

Het projectsaldo aan het eind van de levensduur is gelijk aan de Netto Toekomstige Waarde:

$$(5.3) \quad NTW_T(r, k) = PS_T(r, k)$$

De netto toekomstige waarde is ook te schrijven als:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} NTW_T(r, k) &= A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots \\ &+ A_{T-1} a_{T-1} + A_T a_T \end{aligned}$$

waarbij:

$$A_t = (1+r)^{\alpha_t} (1+k)^{\beta_t}$$

en:

$$\alpha_t + \beta_t = T-t$$

α_t is het aantal periodes na de t -de periode waarin voor het project interest wordt betaald tegen voet r ; β_t is het aantal periodes na de t -de periode waarin voor het project interest ontvangen wordt bij een voet k .

Deling van $NTW(r, k)$ door A_0 geeft:

$$(5.5) \quad NCW(r, k) = a_0 + \frac{A_1}{A_0} a_1 + \frac{A_2}{A_0} a_2 + \dots + \frac{A_T}{A_0} a_T$$

hetgeen inderdaad geïnterpreteerd kan worden als een gegeneraliseerde netto contante waarde omdat a_0 niet wordt gediscoteerd, a_1 voor één periode, a_2 voor twee periodes etc.

De disconteringsfactor is:

$$(5.6) \quad \frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{(1+k)} \quad \text{indien } PS_0 > 0$$

$$= \frac{1}{(1+r)} \quad \text{indien } PS_0 < 0$$

en:

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{1}{(1+k)_2} \quad \text{indien } PS_0 > 0 \text{ en } PS_1 \geq 0$$

$$= \frac{1}{(1+k)(1+r)} \quad \text{indien } PS_0 > 0 \text{ en } PS_1 < 0 \text{ of}$$

$$\text{indien } PS_0 < 0 \text{ en } PS_1 \geq 0$$

$$= \frac{1}{(1+r)^2} \quad \text{indien } PS_0 < 0 \text{ en } PS_1 < 0$$

$$\text{en zo ook voor } \frac{A_3}{A_0}, \frac{A_4}{A_0}, \text{ enz.}$$

Het verband tussen $NCW(r, k)$ en $NTW(r, k)$ is

$$(5.7) \quad NCW(r, k) = \frac{NTW(r, k)}{A_0}$$

Na deze definitie van het projectsaldo, de netto toekomstige waarde en de netto contante waarde als functie van twee voeten r en k , zullen we onderzoeken of het mogelijk is een gegeneraliseerde interne rentevoet te berekenen. Allereerst leiden we de volgende stelling af.

Stelling 5. a. $NTW(r, k)$ is constant met betrekking tot r , indien voor gegeven k

$$(5.8) \quad \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+k)^{t-\tau} \geq 0 \text{ voor } t = 0, \dots, T$$

b. $NTW(r, k)$ is, gegeven k , een monotoon dalende functie van r , indien voor tenminste één t

$$(5.9) \quad \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+k)^{t-\tau} < 0$$

c. is voldaan aan situatie b, dan bestaat er dan en slechts dan één niet-negatieve reële waarde voor r , stel r^* , waarvoor:

$$(5.10) \quad NTW(r^*, k) = NCW(r^*, k) = 0 \quad \text{indien } NTW(0, k) > 0$$

Bewijs:

a. Bezien we de constructie van $NTW(r, k)$, dan blijkt uit

$$(5.11) \quad PS_0(r, k) > 0$$

te volgen

$$(5.12) \quad PS_1(r, k) = (1+k)PS_0(r, k) + a_1 = \sum_{\tau=0}^1 a_{\tau} (1+k)^{1-\tau}$$

Deze term is volgens de voorwaarde (5.8) weer niet-negatief, $PS_1(r, k) \geq 0$; dit leidt tot

$$(5.13) \quad PS_2(r, k) = (1+k)PS_1(r, k) + a_2 = \sum_{\tau=0}^2 a_{\tau} (1+k)^{2-\tau}$$

welke term weer volgens de voorwaarde positief is. We zien dus dat PS_0, PS_1, PS_2 , niet afhangen van r . Deze redenering kan worden voortgezet tot T .

Hieruit volgt dat $PS_T(r, k) = \sum_{\tau=0}^T (1+k)^{T-\tau} a_{\tau}$ evenmin afhankelijk van r is.

b. Is niet voldaan aan alle ongelijkheden in deel a. dan is voor zekere waarde van t^{10})

$$(5.14) \quad PS_t(r, k) = \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+k)^{t-\tau} < 0.$$

¹⁰⁾ Zou deze waarde van t gelijk zijn aan T , dan is het gewenst voor de geldigheid van ons bewijs de horizon met een periode uit te breiden en de netto-toekomstige waarde te bekijken op het tijdstip $T+1$.

Daaruit volgt dat

$$(5.15) \quad PS_{t+1}(r, k) = (1+r)PS_t + a_{t+1}$$

Hieruit volgt dat PS_{t+1} afhankelijk is van r en meer exact

$$(5.16) \quad \frac{\partial PS_{t+1}}{\partial r} = PS_t < 0$$

Bezien we nu $PS_{t+2}(r, k)$ dan moeten we twee gevallen onderscheiden, nl.

$$(5.17) \quad PS_{t+2}(r, k) = (1+k)PS_{t+1}(r, k) + a_{t+2} \text{ als } PS_{t+1} \geq 0$$

en

$$(5.18) \quad PS_{t+2}(r, k) = (1+r)PS_{t+1}(r, k) + a_{t+2} \text{ als } PS_{t+1} < 0$$

In het eerste geval is

$$(5.19) \quad \frac{\partial PS_{t+2}}{\partial r} = (1+k) \frac{\partial PS_{t+1}}{\partial r} < 0$$

In het tweede geval is

$$(5.20) \quad \frac{\partial PS_{t+2}}{\partial r} = PS_{t+1}(r, k) + (1+r) \frac{\partial PS_{t+1}}{\partial r}$$

In dit geval zijn beide termen van het rechterlid negatief, dus ook $\frac{\partial PS_{t+2}}{\partial r} < 0$

Daar r willekeurig gekozen was, bij gegeven k , kunnen wij dus concluderen dat PS_{t+2} een monotoon dalende functie is in r , behalve hooguit in het punt (r, k) waar $PS_{t+1}(r, k) = 0$. In dit punt is $PS_{t+2}(r, k) = a_{t+2}$.

De linker-afgeleide in dit punt is:

$$(5.21) \quad \frac{\partial PS_{t+2}}{\partial r} = (1+k) \frac{\partial PS_{t+1}}{\partial r} < 0$$

de rechter afgeleide

$$(5.22) \quad \frac{\partial PS_{t+2}}{\partial r} = PS_{t+1} + (1+r) \frac{\partial PS_{t+1}}{\partial r} < 0$$

De linker- en rechterafgeleiden zijn in dit punt niet aan elkaar gelijk, maar wel zijn beide negatief; ook in dit punt is de functie monotoon-dalend.

We hebben nu bewezen dat:

$$(5.23) \quad PS_t < 0$$

impliceert dat:

$$(5.24) \quad \frac{\partial PS_{t+1}}{\partial r} < 0$$

hetgeen op zijn beurt weer impliceert dat:

$$(5.25) \quad \frac{\partial PS_{t+2}}{\partial r} < 0$$

Op dezelfde wijze valt nu aan te tonen dat:

$$(5.26) \quad \frac{\partial PS_{t+\tau}}{\partial r} < 0 \quad (\tau = 1, \dots, T-t)$$

Daar geldt dat $NTW = PS_T$ is ook

$$(5.27) \quad \frac{\partial NTW(r, k)}{\partial r} < 0$$

c. Het bewijs van c. is nu gemakkelijk.

Uit de continuïteit van $NTW(r, k)$ volgt dat de monotoon-dalende functie $NTW(r, k)$ hoogstens éénmaal de horizontale as kan kruisen. De voorwaarde hiervoor is, dat $NTW(0, k) > 0$.

Wanneer men in situatie b. eenmaal bij het negatieve projectsaldo is aangeland, kan men door r voldoende groot te maken de volgende projectsaldi negatief houden. In dat geval krijgen we:

$$\begin{aligned} NTW(r, k) &= PS_T(r, k) = \\ &= (1+r)^{T-t} PS_t + \sum_{\tau=t+1}^T a_\tau (1+r)^{T-\tau} \end{aligned}$$

We zien dan dat:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} NTW(r, k) = -\infty$$

Hieruit volgt dan dat er juist één $r^* > 0$ bestaat waarvoor:

$$NTW(r^*, k) = 0$$

Deze stelling is verduidelijkt in figuur 6, waarin is getekend het verband tussen de functie $NTW(r, k)$ en het rentekostenpercentage r , voor verschillende doch gegeven waarden van k , nl. $k=0.00, 0.04, 0.10, 0.20$, voor project A $(-1000, +2300, -1320)$. Duidelijk blijkt dat er ten hoogste één r^* bestaat

waarvoor $NTW(r^*, k) = 0$. Voor $k < \frac{13}{2000}$ is er geen $r^* > 0$ waarvoor $NTW(0, k) > 0$; voor $k \geq \frac{13}{2000}$ is exact één r^* .

In feite vervullen r en k een symmetrische functie, zodat voor financieringsprojecten een analoge stelling valt te formuleren:

Stelling 5A. a. $NTW(r, k)$ is constant in k , indien voor gegeven r :

$$(5.28) \quad \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+r)^{t-\tau} \leq 0 \quad \text{voor } t = 0, \dots, T$$

b. $NTW(r, k)$ is een monotoon stijgende functie van k , gegeven r , indien voor tenminste één t :

$$(5.29) \quad \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+r)^{t-\tau} > 0$$

c. is voldaan aan situatie b., dan geldt dat er d.e.s. d. één $k^* > 0$ is waarvoor:

$$(5.30) \quad NTW(r, k^*) = NCW(r, k^*) = 0$$

indien $NTW(r, 0) < 0$

Er is ook een verband tussen r^* en k , zoals duidelijk blijkt uit figuur 7.

In stelling 5 is aangetoond, dat er ten hoogste één $r^* \geq 0$ is, voor gegeven $k > 0$, waarvoor de gegeneraliseerde $NCW(r^*, k) = 0$. Deze r^* noemen we de *gegeneraliseerde interne rentevoet*. Deze interne rentevoet heeft dan de interpretatie van het maximale rentekostenpercentage, gegeven de rentevergoeding van $k\%$ bij herbelegging, dat vanuit het project kan worden opgebracht. De voet r^* moet dus niet verward worden met het rentepercentage dat in feite betaald wordt, want dit is nog steeds $k\%$. We hebben de veronderstelling van de perfecte kapitaalmarkt, dat kapitaal tegen dezelfde rentevoet (= de marktrente) kan worden aangetrokken als worden herbelegd, niet laten varen.

De beslissingsregel om te komen tot een besluit of een project al dan niet moet worden geëntameerd, is dus de volgende¹¹⁾:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} r^* < k & \text{ het project dient te worden verworpen} \\ r^* \geq k & \text{ het project dient te worden geaccepteerd} \end{aligned}$$

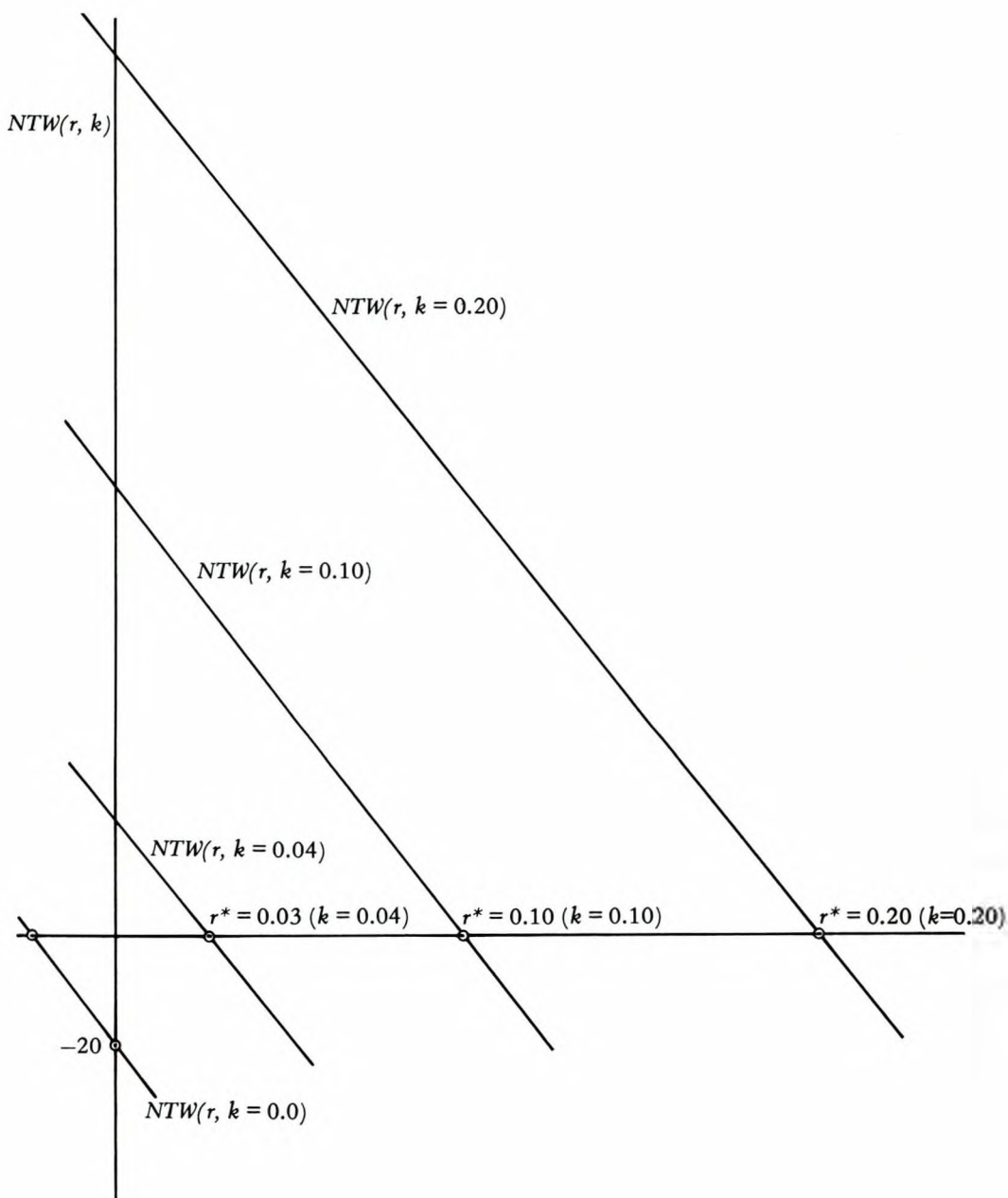
Voor de situatie genoemd in stelling 5, onderdeel a., is de beslissing eenvoudig.

Een dergelijk project, waarvoor gedurende elke periode het projectsaldo is

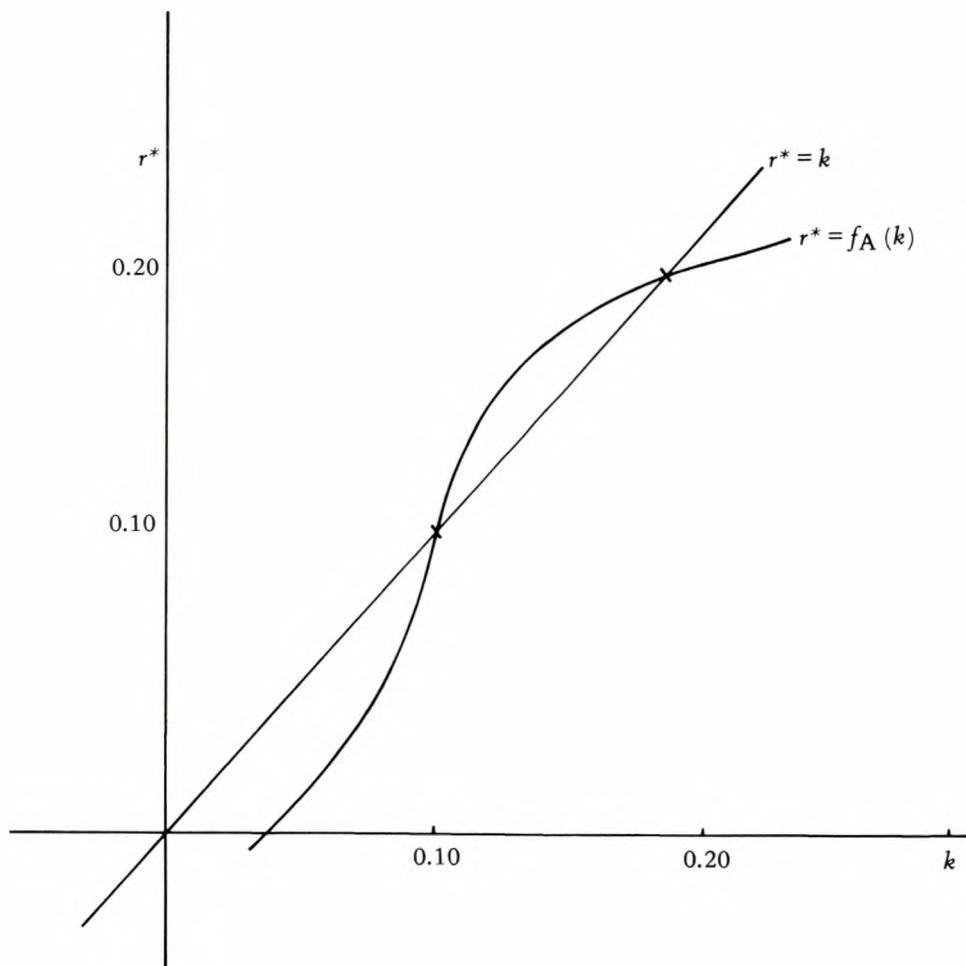
$$(5.8) \quad PS_t = \sum_{\tau=0}^t a_{\tau} (1+k)^{t-\tau} \geq 0 \quad (t = 0, \dots, T)$$

heeft slechts opbrengsten en dient dus ook te worden geëntameerd.

¹¹⁾ De beslissingsregel is gebaseerd op de equivalentie met $NCW > 0$.



figuur 6. Het verband tussen de functie $NTW(r, k)$ en r , voor gegeven k , voor het project $(-1000, +2300, -1320)$.



figuur 7. De gegeneraliseerde interne rentevoet r^* als functie van k voor gemengd project A $(-1000, +2300, -1320)$.

6. Negatieve interne rentevoeten

In het algemeen zal men geen belangstelling hebben voor investeringsprojecten met een interne rentevoet die kleiner is dan nul. In simulatiestudies⁸⁾ kan het voorkomen dat men voor een investeringsproject een dichtheidsfunctie van de interne rentevoet wil construeren, waarbij een positieve kans op een negatieve interne rentevoet niet kan worden uitgesloten. (Door D. Teichroew, A. A. Robichek en M. Montalbano wordt een negatieve rentevoet als een verlies van kapitaal geïnterpreteerd). Derhalve zullen we in dit onderdeel bestuderen of er voor investeringsprojecten altijd een interne rentevoet te berekenen valt, wanneer we de eis dat deze voet $i^* \geq 0$ moet zijn laten vallen en genoeg nemen met de voorwaarde $i^* > -1$. We zullen hierbij weer de indeling maken in enkelvoudige en niet-enkelvoudige projecten.

a. Enkelvoudige projecten

Uit stelling 1 en 2 volgt dat elk enkelvoudig investeringsproject één wortel i^*

heeft, waarvoor $NCW(i^*) = 0$. Bij deze wortel is het project een zuiver investeringsproject.

b. Niet-enkelvoudige projecten

Voor niet-enkelvoudige investeringsprojecten met een éénduidige payback-tijd is in stelling 3 reeds aangetoond, dat deze projecten één niet-negatieve reële interne rentevoet hebben. In stelling 4 is bovendien aangetoond dat deze projecten zuiver zijn.

Voor niet-enkelvoudige investeringsprojecten zonder éénduidige payback-tijd leiden we de volgende stelling af:

Stelling 6

a. Er bestaat geen wortel r^* waarvoor $NCW(r^*, k) = 0$, indien voor gegeven k

$$(6.1) \quad \sum_{\tau=0}^T a_{\tau} (1+k)^{t-\tau} \geq 0 \quad \text{voor } t = 0, \dots, T$$

b. Wanneer er tenminste één t bestaat waarvoor:

$$(6.2) \quad \sum_{\tau=0}^T a_{\tau} (1+k)^{t-\tau} < 0$$

bestaat er één wortel $r^* > -1$ waarvoor $NCW(r^*, k) = 0$, indien voor gegeven k

$$(6.3) \quad NTW(r = -1, k) > 0$$

c. Wanneer voor gegeven k

$$(6.4) \quad NTW(r = -1, k) \leq 0$$

is er geen wortel $r^* > -1$ waarvoor $NCW(r^*, k) = 0$.

Bewijs:

a. Zie stelling 5 onderdeel a.,

b. In het bewijs van stelling 5 onderdeel b. is aangetoond dat de functie $NTW(r, k)$ voor gegeven k een monotoon-dalende functie van r is. Aangezien er geldt:

$$(6.5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} NTW(r, k) < 0$$

en omdat $NTW(r = -1, k) > 0$ is er een wortel $r^* > -1$ waarvoor $NTW(r^*, k) = NCW(r^*, k) = 0$.

c. Wanneer $NTW(r = -1, k) \leq 0$, volgt uit het monotoon-dalende verloop van $NTW(r, k)$, dat er geen wortel $r > -1$ kan zijn waarvoor $NCW(r, k) = 0$.

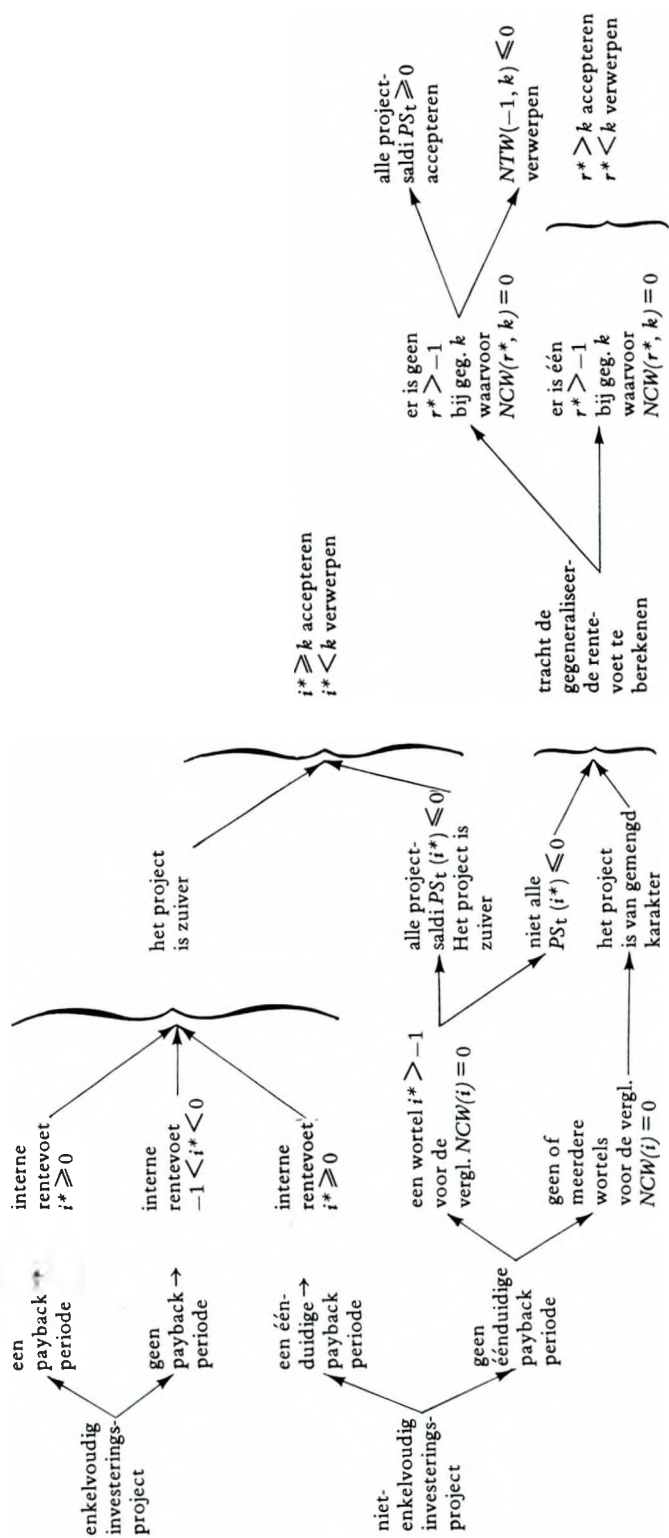
7. De berekeningswijze van de interne rentevoet

Op grond van de analyse in de voorgaande hoofdstukken zijn we nu in staat een *recept* te geven hoe men moet handelen met een volstrekt willekeurige cashflow. Dit is in figuur 8 schematisch weergegeven. Het blijkt dat met dit recept inderdaad elke categorie is gedekt.

Eerst hebben we een indeling gemaakt in enkelvoudige en niet-enkelvoudige projecten, vervolgens in investeringsprojecten mét en zónder een (éénduidige) paybacktijd. Het bestaan van een (éénduidige) paybacktijd is een zeer plezierige eigenschap. In dit geval is de berekening van de wortel van de vergelijking $NCW(i) = 0$ voldoende om de interne rentevoet te kennen. Vergelijking met de marktrente levert ons de beslissing. Heeft het project geen éénduidige paybackperiode, dan is het interessant om te weten of het project enkelvoudig of niet enkelvoudig is. Is het project enkelvoudig, dan hoeft er verder niet gerekend te worden want er is een negatieve interne rentevoet waarbij het project natuurlijk verworpen dient te worden. Is het project niet-enkelvoudig dan is het aan te bevelen om de gegeneraliseerde interne rentevoet-methode toe te passen. Het is ook in dit geval mogelijk dat men één wortel $i^* > -1$ kan vinden voor de vergelijking $NCW(i) = 0$, waarbij het project zuiver is. Vaak zal het project niet zuiver zijn, bijgevolg is dan deze wortel niet geschikt als beslissingscriterium. In dit geval verkeert men in dezelfde situatie als wanneer men meerdere wortels of geen wortels voor de vergelijking $NCW(i) = 0$ had gevonden en dient men over te gaan op de berekening van de gegeneraliseerde interne rentevoet.

Nu is het ook mogelijk dat men geen gegeneraliseerde interne rentevoet vindt. Dit kan het geval zijn wanneer het projectsaldo steeds positief is gedurende de levensloop, hetgeen betekent dat het project slechts geld opbrengt. Vanzelfsprekend dienen we een dergelijk project te accepteren.

Een andere mogelijkheid is, dat men te maken heeft met een project waarin men alles verliest ($NTW_T(-1, k) \leq 0$). Vanzelfsprekend moeten we een dergelijk project verwerpen. In de overige gevallen waar men wel een wortel kan berekenen, komt men door vergelijking met de marktrente tot de beslissing.



figuur 8. Het interne rentevoetcriterium

Literatuur

- 1 Bierman H. en Smidt S., *The capital Budgeting Decision*, Macmillan, 1966.
- 2 Een survey van de moderne engels-talige literatuur is te vinden in M. Bromwich, „Capital Budgeting - a Survey”, *Journal of Business Finance Quarterly*, Volume 2, no. 3.
- 3 Diepenhorst A. I., „Investeringsselectie in Theorie en Praktijk”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, 1967, 41, pag. 171.
- 4 Eijgenhuijsen H. G., „De Terugverdientijd als Investeringsselectie-criterium”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, 44, no. 3, maart 1970.
- 5 Hirshleifer J., „On the Theory of Optimal Investment Decisions”, *Journal of Political Economy*, 1958. *Investment, Interest and Capital*, Prentice Hall, 1970.
- 6 Mao J. C. T., „An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty: A Comment”, *Management Science*, Volume 13. (nov. 1966).
- 7 Mao J. C. T., *Quantitative Analysis of Financial Decisions*, Macmillan, 1969, Chapter 6.
- 8 Merrett A. J. and Sykes A., *The Finance and Analysis of Capital Projects*, Longmans, 1963.
- 9 Norstrom C., „A Note on Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty”, *Management Science*, Volume 13. (jan. 1967).
- 10 Ruizendaal N. L., „De interne rentevoet”, *Maandblad voor Accountancy en bedrijfshuishoudkunde* 43, februari 1969, no. 2.
Ruizendaal N. L., „De interne rentevoet II”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde* 44, juli 1970.
Scheffer C. F., „Aantekeningen n.a.v. Ruizendaals artikel over de interne rentevoet”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde* 44, juli 1970, no. 7.
- 11 Sarnai M. en Levy H., „The Relationship of Rules of Thumb to the Internal Rate of Return: A Restatement and a Generalisation”, *Journal of Finance*, June 1969, no. 3, Volume XXIV.
- 12 Teichroew D., *An Introduction to Management Science*, New York, John Wiley and sons, Inc. 1964.
- 13 Teichroew D., Robichek A. A. en Montalbano M., „Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty”, *Management Science*, Volume 11, January 1965, pp 395-403.
- 14 Weingartner M. H., „Some New Views on the Payback-Period and Capital Budgeting Decisions”, *Management Science*, B-594, 1968-1969.