

BEDRIJFSECONOMISCHE BETEKENIS VAN DE INPUT-OUTPUT ANALYSE

door Drs. C. van Halem

Inleiding

Reeds enige jaren maakt men in de internationale bedrijfseconomische literatuur gebruik van de door Leontief (4) ontwikkelde methode om d.m.v. input-output tabellen de kwantitatieve relaties tussen de verschillende onderdelen (sectoren) van een volkshuishouding tot uitdrukking te brengen. Mattessich (6) heeft in een vroeg stadium de bruikbaarheid van deze methode op bedrijfseconomisch terrein gesignaleerd. Dat de mogelijkheid van bedrijfseconomische toepassingen van de input-output analyse hoog wordt aangeslagen blijkt wel uit het feit, dat in de Verenigde Staten enkele grote multi-produktondernemingen zich verenigd hebben in het zgn. Maptekproject om op dit terrein onderzoek te verrichten (7). De Nederlandse bedrijfseconomische literatuur heeft echter nog nauwelijks aandacht aan het onderhavige onderwerp geschonken. Dit artikel heeft daarom de bedoeling om op eenvoudige wijze enigszins in deze leemte te voorzien. Uitgaande van de oorspronkelijke input-output analyse in de macro-economie zullen bedrijfseconomische toepassingen op het terrein van de planning en de kostenverbijzondering behandeld worden. Reeds nu zij opgemerkt dat de input-output analyse in haar oorspronkelijke vorm neerkomt op het opstellen en oplossen van een aantal lineaire vergelijkingen met een even groot aantal onbekenden. Bij een groot aantal vergelijkingen is het gebruiken van matrix-algebra het meest geëigend. Belangrijk is echter te onderkennen dat de matrix-algebra „slechts” dient als hulpmiddel en als zodanig geen wezenlijk onderdeel uitmaakt van de input-output analyse. In het navolgende zal dan ook de matrix-algebra buiten beschouwing blijven; slechts ter illustratie worden de in de tekst behandelde voorbeelden in een bijlage m.b.v. matrix-algebra weergegeven en opgelost.

De input-output analyse in de macro-economie

De grootheden input en output zijn in de economische wetenschap algemeen bekend. In de input-output analyse worden deze grootheden per te onderscheiden sector van bedrijvigheid (industrie, landbouw, handel, etc.) beschouwd. Men gaat er hierbij vanuit dat de output van de ene sector deels als input voor de andere sectoren dient.

Omgekeerd kan men stellen dat de benodigde inputs t.b.v. een zekere output van een bepaalde sector zal bestaan uit outputgrootheden van andere sectoren. Dit verband nu tussen input en output of liever tussen output van de ene sector en input van de andere sector is de grondslag van de input-output analyse.

Laten wij om deze gedachtengang te illustreren, uitgaan van een eenvoudig voorbeeld¹⁾

¹⁾ Vereenvoudigde versie van het door S. M. Farag gegeven model in (1).
m a b blz. 524

tabel 1 *Input-output tabel; bedragen in miljoenen guldens*

naar van	sectoren			finale vraag	totale output
	1	2	3		
1	0	30	60	110	200
2	10	0	90	150	250
3	25	25	0	250	300
primaire input	165	195	150	510	
totale input	200	250	300		750

In dit voorbeeld zijn drie sectoren van bedrijvigheid onderscheiden die elk één gestandaardiseerd soort produkt voortbrengen. Voorzover de output van een bepaalde sector niet doorgeleverd wordt als input voor andere sectoren, wordt zij ter beschikking gesteld van de finale vraag. Onder de finale vraag kan in een eenvoudige economie, waarin wordt afgezien van overheid en buitenland, de consumptieve vraag verstaan worden. Merk op dat in dit voorbeeld de output van een bepaalde sector niet tevens als input voor dezelfde sektor kan dienen.

De input van een bepaalde sector bestaat behalve uit eenheden output van andere sectoren uit zgn. primaire input. Onder primaire input worden alle „van buiten” komende inputgrootheden gerekend zoals lonen, interest, pachten etc. i.c. de toegevoegde waarde.

Teneinde het hiervoor genoemde verband tussen input en output nader vorm te geven, gaan wij uit van de eerste regel van tabel I.

De totale output van sector 1 ad. f 200 milj. is als volgt opgebouwd:

- f 30 milj. als input voor sector 2, d.i. $\frac{30}{250} = 0,12$ van de output van sector 2.
- f 60 milj. als input voor sector 3, d.i. $\frac{60}{300} = 0,2$ van de output van sector 3.
- f 110 milj. output t.b.v. de finale vraag.

Indien 0_1 de output van sector 1 voorstelt kunnen wij schrijven:

$$0_1 = 0,12 0_2 + 0,2 0_3 + 110 \quad (1)$$

De factoren 0,12 en 0,2 worden technische coëfficiënten genoemd. Op overeenkomstige wijze kunnen op basis van de tweede en derde regel de technische coëfficiënten bepaald worden die betrekking hebben op de output van de sectoren 2 en 3.

De op de input-output gedachte gebaseerde rekentechniek bestaat nu hierin dat de technische coëfficiënten uit historische gegevens berekend worden en voor de komende perioden als onveranderd gegeven gebruikt worden. Of deze veronderstelling gerechtvaardigd is valt buiten het kader van dit artikel en zal veelal slechts empirisch getoetst kunnen worden. Opge-

merkt zij nog dat de manier waarop de maatschappelijke bedrijvigheid in sectoren wordt opgesplitst hier van betekenis is.

De input-output analyse in de bedrijfseconomie

De interpretatie van het bovenstaande algemeen-economisch model als een model van een bedrijfshuishouding levert weinig problemen op. Laten wij daartoe in tabel I niet langer miljoenen maar bijvoorbeeld duizenden guldens lezen. Verder beschouwen wij de sectoren 1, 2 en 3 als drie produktie-afdelingen van een bedrijf met hun overeenkomstige produkten.²⁾ De finale vraag stelt de som van de verkopen en de veranderingen in de voorraad eindprodukten voor.

Tenslotte „vertalen” wij de primaire inputs als de totale kosten van een afdeling uitgezonderd dat gedeelte dat voortspruit uit de levering van goederen of diensten door andere afdelingen.

Dit gedeelte van de totale kosten zullen wij in het navolgende kortweg „eigen” afdelingskosten noemen. Laten wij er van uitgaan dat de in tabel I vermelde cijfers betrekking hebben op de afgelopen periode en dat de daaruit af te leiden technische coëfficiënten voor de volgende periode als plan-gegeven gebruikt mogen worden.

Indien nu tevens de kosten per eenheid produkt bekend zijn t.w.

produkt 1 f 10,—

produkt 2 f 2,—

produkt 3 f 5,—

dan is het mogelijk een nieuwe tabel te formeren waarin niet langer geldbedragen voorkomen maar aantallen fysieke eenheden³⁾. Hiertoe delen wij de regels van tabel I (voorstellende de geldswaarde van de produktie van een bepaald goed) door de bovenstaande kosten per eenheid:

tabel II *Input/output tabel in hoeveelheden (duizenden stuks)*

naar van	1	2	3	V = verkopen + voorraadmutatie	totale output
1	0	3	6	11	20
2	5	0	45	75	125
3	5	5	0	50	60

Deze tabel dient als volgt gelezen te worden. Van de totale produktie van afdeling 1 t.w. 20.000 stuks worden 3000 eenheden geleverd aan afdeling 2 en 6000 eenheden aan afdeling 3, terwijl 11.000 eenheden worden verkocht of toegevoegd aan de voorraad.

²⁾ Daar de sectoren/afdelingen één gestandaardiseerd produkt voortbrengen kunnen wij b.v. voor produktie van afdeling 2 ook lezen „de produktie van produkt 2” e.o.

³⁾ De overgang van geldbedragen naar fysieke eenheden is van weinig fundamentele betekenis; in het kader van een bedrijfseconomische context biedt het werken met fysieke eenheden echter voordelen daar dan b.v. de kosten per eenheid produkt als separate factor optreden. Zie hiertoe (5). Ook aansluiting met andere planningstechnieken b.v. korte termijnplanning m.b.v. lineaire programmering is dan beter verzekerd. Zie (2).

Het sommeren van een kolom (vertikaal) is uiteraard niet meer mogelijk daar de getallen thans betrekking hebben op ongelijksoortige goederen, die in verschillende grootheden (b.v. liters en kg.) uitgedrukt kunnen zijn. Het totaal van een kolom kennen wij echter wel; zo zal het totaal van kolom 1, 20.000 produkten van afdeling 1 moeten voorstellen wegens de eerder gebleken gelijkheid tussen input en output. Evenzo zal het totaal van kolom 2 125.000 produkten 2 voorstellen en het totaal van kolom 3 60.000 produkten 3. Bezien wij regel 1 op een overeenkomstige manier als wij in het voorgaande gehanteerd hebben, dan geldt dat de output van afdeling 1 t.b.v. afdeling 2 3.000 stuks bedraagt, overeenkomend met $\frac{3.000}{125.000}$ of 0,024 van de output van afdeling 2. De output van 1 t.b.v. 3 (6.000 stuks) bedraagt $\frac{6.000}{60.000} = 0,1$ van de output van afdeling 3. De aldus verkregen tabel III kan nog aangevuld worden met een vierde regel, aangevende de totale „eigen” kosten van elke afdeling per eenheid voortgebracht produkt.

tabel III

naar van	1	2	3
1	0	0,024	0,1
2	0,25	0	0,75
3	0,25	0,04	0
totale eigen kosten per produkt	8,25	1,56	2,5

Hiermede is een apparaat ontwikkeld dat voor een aantal bedrijfseconomische toepassingen nuttig kan zijn. Alvorens dit te demonstrenen voeren wij een aantal symbolen in t.w.

X_i = totaal aantal geproduceerde produkten i

X_j = totaal aantal geproduceerde produkten j

x_{ij} = aantal produkten i dat (als input) aan afdeling j geleverd wordt

V_i = aantal produkten i dat verkocht wordt dan wel haar weerslag vindt in voorraadmutaties

a_{ij} = totaal aantal produkten i dat als input dient t.b.v. de produktie van j, betrokken op de totale produktie van j of in symbolen $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ deze breuk is de algemene aanduiding van de in tabel III gegeven fracties.

K_j = totale „eigen” (afdelings)kosten van kostenplaats j

TK_j = totale (afdelings)kosten van kostenplaats j na kostenallocatie

k_i = kosten per eenheid produkt i

De hierboven gedefinieerde symbolen staan in de volgende relatie tot elkaar:

$$X_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij} + V_i \quad (2)$$

B.v. voor $i = 2$ zou conform tabel II gelden

$$125 = (5 + 45) + 75$$

Tevens geldt op grond van de bovengenoemde definitie van a_{ij} dat

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j \quad (3)$$

Planningsvraagstukken

De input-output analyse in de algemene economie staat voornamelijk als planningsinstrument bekend; daarom ligt de bedrijfseconomische parallel hiervan het meeste voor de hand om als eerste aan de orde te komen.

Hiertoe specificeren wij de algemene vergelijking (2) als:

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + V_1$$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + V_2$$

$$X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + V_3$$

Daar tevens (3) geldt kunnen wij deze vergelijkingen ook schrijven als:

$$X_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + V_1$$

$$X_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + V_2 \quad (4)$$

$$X_3 = a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + V_3$$

Wanneer de technische coëfficiënten a_{ij} historische, b.v. door ervaring bekende getallen zijn (tabel III), is het mogelijk de gevolgen van een verandering in één of meer vraagcomponenten voor de totale output van elke produkt/afdeling te berekenen. In gevolge (3) worden dan tevens de vereiste interne leveringen x_{ij} verkregen.

Laten wij bij wijze van illustratie veronderstellen dat de vraag naar produkt 2 voor de komende periode in plaats van de oorspronkelijke 75.000 stuks op 100.000 stuks geschat wordt; de vraag naar de overige produkten blijft ongewijzigd. De benodigde totale output van elk produkt/afdeling is nu te berekenen uit het onderstaande herschreven vergelijkingenstelsel (4):

$$X_1 = 0 \quad 0,024 X_2 + 0,1 X_3 + 11$$

$$X_2 = 0,25 X_1 + 0 \quad + 0,75 X_3 + 100$$

$$X_3 = 0,25 X_1 + 0,04 X_2 + 0 \quad + 50$$

Eenvoudige algebraïsche oplossing van dit stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden levert de volgende waarden op:

$$X_1 = 20,94$$

$$X_2 = 150,67$$

$$X_3 = 61,08$$

Verandering van de vraag naar één bepaald produkt heeft uiteraard consequenties voor de vereiste output van alle produkten. Met behulp van vergelijking (3) zijn nu de voor de nieuwe situatie benodigde interne leveringen als volgt te berekenen:

$$x_{12} = 0,024 \cdot 150,67 = 3,01$$

$$x_{13} = 0,1 \cdot 61,08 = 6,11$$

$$x_{21} = 0,25 \cdot 20,94 = 5,23$$

$$x_{23} = 0,75 \cdot 61,08 = 45,81$$

$$x_{31} = 0,25 \cdot 20,94 = 5,23$$

$$x_{32} = 0,04 \cdot 150,67 = 6,02$$

In ondernemingen met een groot aantal afdelingen of divisies die onderling

leveren, kan bovenstaande techniek nut afwerpen.⁴⁾ Hierbij zij aangetekend dat ook afdelingen die uitsluitend aan andere afdelingen leveren ($V_i = 0$) in de analyse kunnen worden opgenomen.

Kostenvraagstukken

Ook op dit terrein kan de input-output analyse nuttige diensten bewijzen. Vraagstukken op het terrein van de kostenallocatie kunnen door middel van de input-output analyse cq. een stelsel lineaire vergelijkingen (8) gemakkelijk tot een oplossing gebracht worden. De kostenverdeelstaat die gehanteerd wordt in relatie tot de produktiecentramethode is een bekend hulpmiddel bij kostenverbijzonderingsvraagstukken. De totaalkosten TK_j van een in die gedachtengang onderscheiden kostenplaats bestaan uit twee delen t.w.

- „eigen” afdelingskosten⁵⁾ K_j
- doorbelaste kosten van andere kostenplaatsen

De in het voorgaande genoemde afdelingen 1, 2 en 3 beschouwen wij nu als kostenplaatsen. De „eigen” afdelingskosten hebben in het voorgaande al een plaats gekregen in het input-output model; de kostendoorbelastingen tussen kostenplaatsen nemen nu de plaats in van de onderlinge leveringen. Schematisch komt het bovenstaande op het volgende neer.

tabel IV

naar van	1	2	3	
1 2 3	doorbelaste kosten			
primaire input	„eigen” afd. kosten			
totaal				

Daar kostenallocatie betrekking heeft op geldsbedragen, dienen wij terug te gaan naar tabel I. Indien wij tabel I in duizenden guldens lezen en de onderlinge leveringen als doorbelaste kosten dan kunnen wij de onderliggende kosten-verdeelsleutels opsporen door elke doorbelasting te betrekken op het bijbehorende regeltotaal.

⁴⁾ De in het kader van input-output analyse gangbare toepassing van matrix-algebra biedt in deze gevallen bij een groter aantal vergelijkingen al snel rekentechnische voordelen. Het hier behandelde eenvoudige probleem is in de bijlage met behulp van matrix-algebra uitgewerkt.

⁵⁾ Hieronder zijn eventueel van hulpafdelingen toegerekende kosten begrepen.

tabel V

naar van	1	2	3
1	0	$\frac{30}{200} = 0,15$	$\frac{60}{200} = 0,30$
2	$\frac{10}{250} = 0,04$	0	$\frac{90}{250} = 0,36$
3	$\frac{25}{300} = 0,08$	$\frac{25}{300} = 0,08$	0

Laten wij uitgaan van de „eigen” afdelingskosten K_j , zoals deze in tabel I gegeven zijn, t.w.

$$K_1 = 165000$$

$$K_2 = 195000$$

$$K_3 = 150000$$

en stel, dat wij de uiteindelijke kostentotalen TK_j van ieder van de drie afdelingen moeten berekenen op basis van de in tabel V gegeven verdeelsleutels.

De totale kosten van afdeling j zijn dan als volgt samengesteld:

$TK_j = K_j +$ toegerekende kosten van andere afdelingen.

Indien wij tabel V „vertikaal” lezen kunnen wij de volgende vergelijkingen opstellen:

$$TK_1 = 0,04 TK_2 + 0,08 TK_3 + 165.000$$

$$TK_2 = 0,15 TK_1 + 0,08 TK_3 + 195.000$$

$$TK_3 = 0,30 TK_1 + 0,36 TK_2 + 150.000$$

Oplossing van dit stelsel vergelijkingen levert de volgende waarden op⁶⁾

$$TK_1 = f 200.000,-$$

$$TK_2 = f 250.000,-$$

$$TK_3 = f 300.000,-$$

De aldus berekende totale afdelingskosten komen uiteraard overeen met de in tabel I onder de kolom „totaal” vermelde bedragen wegens de keuze van de bedragen voor „eigen” afdelingskosten conform de zgn. primaire inputs in tabel I en de keuze van de verdeelsleutels. Wederzijdse kostendoorbelastingen zijn er de oorzaak van dat de som van de kostentotalen van de afdelingen groter is dan de som van de „eigen” afdelingskosten. In symbolen:

$$\sum_{j=1}^3 TK_j > \sum_{j=1}^3 K_j$$

⁶⁾ In de bijlage is de oplossing m.b.v. matrix-algebra vermeld.

Het eerder gegeven schema kunnen wij nu als volgt completeren:

naar van	kostenplaatsen			totale afdelings- kosten afgezien van door- belastingen	totale afdelings- kosten
	1	2	3		
1					
2					
3					
„eigen” afdelings- kosten					

Wederzijdse allocaties zullen bij toepassing van de traditionele kosten-verdeelstaat tot principieel onoplosbare moeilijkheden aanleiding geven. Zo zal b.v. afdeling 1 een deel van haar kosten doorbelasten aan afdeling 2, terwijl op haar beurt afdeling 2 een deel van haar kosten zal doorbelasten aan afdeling 1; daardoor ontvangt de laatste een deel van haar eigen afdelingskosten terug, waarmee het allocatieproces weer opnieuw begonnen zou moeten worden. Veelal lost men dit op door bepaalde allocaties te verwaarlozen. (3, p. 424) In geval van wederzijdse doorbelastingen is de kostenallocatie echter alleen principieel juist op te lossen door middel van een aantal lineaire vergelijkingen.

Had het bovenstaande betrekking op de berekening van totale kostenbedragen, denkbaar is ook een situatie waarin men slechts geïnteresseerd is in de verhouding tussen de „eigen” afdelingskosten per eenheid produkt en de totale kosten per eenheid produkt k_i . In het voorgaande zijn wij bij de omzetting van geldbedragen in fysieke eenheden (van tabel I naar tabel II) van de volgende kosten per eenheid produkt uitgegaan:

$$k_1 = f \ 10,-$$

$$k_2 = f \ 2,-$$

$$k_3 = f \ 5,-$$

Bezien wij tabel III, dan lezen wij uit de eerste kolom dat de kosten per eenheid produkt 1 bestaan uit:

- f 8,25 „eigen” afdelingskosten
- f 0,25 van de kosten per eenheid produkt 2
- f 0,25 van de kosten per eenheid produkt 3

Op soortgelijke wijze voor de andere kolommen redenerend geldt:

$$k_1 = 8,25 + 0,25 k_2 + 0,25 k_3$$

$$k_2 = 1,56 + 0,024 k_1 + 0,04 k_3$$

$$k_3 = 2,5 + 0,1 k_1 + 0,75 k_2$$

Oplossing van dit vergelijkingstelsel⁷⁾ levert inderdaad bovenstaande waarden van k_1 , k_2 en k_3 op.

Het zal duidelijk zijn dat het nu mogelijk is om de gevolgen van een

⁷⁾ Zie bijlage.

wijziging in de „eigen” afdelingskosten voor de kosten per eenheid produkt te berekenen. Stel dat deze afdelingskosten voor de volgende periode naar schatting zullen bedragen:

voor produkt (afd) 1 f 9,—

voor produkt (afd) 2 f 1,56 (ongewijzigd)

voor produkt (afd) 3 f 2,50 (ongewijzigd)

Door in de eerste vergelijking van bovenstaand stelsel f 8,25 te vervangen door f 9,— vinden wij:

$$k_1 = 10,79$$

$$k_2 = 2,02$$

$$k_3 = 5,11$$

Op deze wijze is het dus mogelijk om direct het effect te berekenen van een wijziging in de „eigen” afdelingskosten voor de kosten per eenheid produkt.

Slotopmerking

In dit artikel is de input-output analyse in haar eenvoudigste vorm aan de orde gekomen. De gepresenteerde macro- en bedrijfseconomische modellen steunen op vele veronderstellingen. Of deze veronderstellingen de bruikbaarheid bij praktische toepassing te veel zullen aantasten is op voorhand niet te voorspellen. De ervaringen op macro-economisch terrein zijn hoogstens hoopgevend. Bovenstaande opmerkingen t.a.v. de bruikbaarheid van het input-output model slaan in eerste instantie op de toepassing t.b.v. planningsvraagstukken. Immers t.a.v. kostenvraagstukken is de input-output analyse in het voorafgaande slechts als rekentechniek gepresenteerd, gebaseerd op een in de bedrijfseconomische literatuur gangbaar leerstuk als de produktie centra methode. De bruikbaarheid van de input-output analyse op dit terrein strekt dus voorlopig niet verder dan de bruikbaarheid van de produktie centra methode. De in dit kader principieel juiste oplossing van het probleem van wederzijdse kostenallocaties berust meer algemeen op het oplossen van een aantal lineaire vergelijkingen met een even groot aantal onbekenden en niet op een specifieke verdienste van de input-output analyse.

De voornaamste betekenis op het terrein van de kostenvraagstukken ligt voorlopig besloten in de geboden mogelijkheid om de consequenties van wijzigingen in de kosten en verdeelsleutels snel te leren kennen.

Literatuur

- 1 S. M. Farag, *A Planning Model for the Divisionalized Enterprise*. The Accounting Review, April 1968.
- 2 T. E. Gambling and A. Nour, *A Note on Input Output Analysis: Its Uses in Macro-Economics and Micro-Economics*. The Accounting Review, January 1970.
- 3 C. T. Horngren, *Cost Accounting*. Third Edition. Prentice Hall, 1972.
- 4 W. W. Leontief, *The Structure of the American Economy*. 1919-1939 2nd. ed. Oxford University Press, New York, 1951.
- 5 J. L. Livingstone, *Input-Output Analysis for cost accounting, planning and control*. The Accounting Review, January 1969.
- 6 R. Mattessich, *Accounting and Analytical Methods*. Irwin Inc., 1964.
- 7 J. H. P. Paelinck en R. de Boer, *Input-output analyse als hulpmiddel bij het beleid voor multi-produktondernemingen*. E.S.B., 25-10-1972.
- 8 T. H. Williams and C. H. Griffin, *Matrix Theory and Cost Allocation*. The Accounting Review, July 1964.
D. W. Feenstra, *Matrix-algebra als hulpmiddel bij de kostenverbijzondering*. M.A.B., mei/juni 1973. Kwantitatieve methoden.

Bijlage

Planningsvraagstukken

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} 0 & 0,024 & 0,1 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \\ 0,25 & 0,04 & 0 \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[X] = [A] \cdot [X] + [V]$$

$$[I-A] \cdot [X] = [V]$$

$$[X] = [I-A]^{-1} [V]$$

$$[I-A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,04 & 0,03 & 0,13 \\ 0,47 & 1,04 & 0,83 \\ 0,28 & 0,05 & 1,06 \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} 11 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [X] = \begin{bmatrix} 20,94 \\ 150,67 \\ 61,08 \end{bmatrix}$$

Kostenvraagstukken I

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0,04 & 0,08 \\ 0,15 & 0 & 0,08 \\ 0,30 & 0,36 & 0 \end{bmatrix} \quad [K_j] = \begin{bmatrix} 165 \\ 195 \\ 150 \end{bmatrix} \quad [TK_j] = \begin{bmatrix} TK_1 \\ TK_2 \\ TK_3 \end{bmatrix}$$

$$[TK_j] = [B] \cdot [TK_j] + [K_j]$$

$$[I-B] \cdot [TK_j] = [K_j]$$

$$[TK_j] = [I-B]^{-1} \cdot [K_j]$$

$$[TK_j] = \begin{bmatrix} 1,04 & 0,07 & 0,09 \\ 0,19 & 1,04 & 0,10 \\ 0,38 & 0,40 & 1,06 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 165 \\ 195 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Kostenvraagstukken II

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{K_j}{X_j} \right] = \begin{bmatrix} 8,25 \\ 1,56 \\ 2,50 \end{bmatrix}, \quad [A^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0,024 & 0 & 0,04 \\ 0,1 & 0,75 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k] = [A^T] \cdot [k] + \left[\frac{K_j}{X_j} \right]$$

$$[k] = [I-A^T]^{-1} \cdot \left[\frac{K_j}{X_j} \right]$$

$$[I-A^T]^{-1} = \left[[I-A]^{-1} \right]^T$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 1,04 & 0,47 & 0,28 \\ 0,03 & 1,04 & 0,05 \\ 0,13 & 0,83 & 1,06 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8,25 \\ 1,56 \\ 2,50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$