# TECHNISCH JUISTE PROPORTIONALITEIT

*door Prof. Dr S. Kleerekoper*

In het onderstaande artikel zullen de volgende afkortingen worden gebruikt:

L. Q. De leer van de kwantitatieve verhoudingen, 1e gedeelte, in de handel gebracht college-dictaat van Prof. Dr H. J. van der Schroeff.

B I en B II. Grondbeginselen der bedrijfseconomie, deel I en deel II van mijn hand.

M.A.B. Maandblad voor accountancy en bedrijfshuishoudkunde.

Voor de technisch juiste proportionaliteit is wederom het symbool $\tau$ gebruikt.

Onder de titel „De plaats en de betekenis van het begrip technisch juiste proportinaliteit in de leer van de kwantitatieve verhoudingen" publiceerde collega *van der Schroeff* in het M.A.B. van Maart 1953 een artikel, dat een antwoord bevat op mijn 2 jaar geleden gepubliceerde artikelenreeks [1]), waarin ik mij o.a. verweerde tegen een critiek, die door *van der Schroeff* op mijn analyse van het probleem in L.Q. is gepubliceerd. Ook nu nog houdt mijn opponent vol dat $\tau$ niet berekend *kan* worden en dat mijn afleiding willekeurig is. Om nu maar dadelijk in *medias res* te komen. Zowel mijn betoog als de afwijzing ervan door mijn ambtgenoot berusten op de waardering van de betekenis der methode, waarop ik de grootte van een willekeurig samenstel van productie-middelen ($k_1$, $k_2$ ... $k_n$) wil meten. En nu zegt *van der Schroeff*, dat mijn metingsmethode voor de grootte van het samenstel van productiemiddelen en de daarop gebaseerde afleiding van $\tau$ gebaseerd is op de formule $t = \sqrt{k_1 . k_2}$. Dit zou een aprioristische grondslag zijn. „Waarom" zo vraagt mijn opponent „niet de derdemachtswortel uit $k_1 . k_2 .$ of de zevendemachtswortel? Beide veronderstellingen zijn even aanvaardbaar of onaanvaardbaar als de tweedemachtswortel", zo zegt hij [2]).

Mijn antwoord hierop luidt: het is beslist niet waar, dat ik mij bij de analyse heb beperkt tot de vierkantswortel. Weliswaar wordt in B I op pagina 101 *voor het geval, dat wij uitgaan van twee-productiefactoren* de formule $t = \sqrt{k_1 . k_2}$ geïntroduceerd, maar, als mijn criticus drie pagina's verder zou hebben doorgelezen (dus B.I. pag. 104), dan zou hij hebben gezien, dat mijn algemene formule luidt:

$$t = \sqrt[n]{k_1 . k_2 . \ldots\ldots\ldots k_n}$$

d.w.z. de door mij gebruikte wortelexponent is gelijk aan het aantal gebruikte productiefactoren. Mij dunkt, dat dit gans iets anders is, als een aprioristisch gekozen vierkantswortel, die even zo goed zou kunnen worden vervangen door een derdemachtswortel of door een zevendemachtswortel.

De moeilijkheid waar *van der Schroeff* wederom op is gestuit, is die van de keuze van de eenheden.

Weliswaar maakt *van der Schroeff* bezwaar tegen mijn stelling dat „zijn inzicht door de keuze van de eenheden zou zijn vertroebeld" [3]) en

---

[1]) M.A.B. Jan. Feb. Maart 1951.
[2]) M.A.B. Maart 1953 blz. 110.
[3]) T.a.p. blz. 108/109.

zou er in de keuze der eenheden voor hem „geen enkele moeilijkheid" zijn gelegen [4]) en meent hij „ter vereenvoudiging van de discussie te kunnen voorbijgaan aan hetgeen op blz. 98 t/m 101 (d.i. van M.A.B. 1951. S.Kl.) van het artikel is geschreven" [5]), maar dit alles neemt niet weg dat ook nu weer zijn critiek op de technische kosten-eenheden

$$(t = \sqrt[n]{k_1 . k_2 \ldots\ldots\ldots k_n})$$

strandt, *juist* op gebrek aan begrip voor deze materie. Wat is n.l. het geval?

Mijn analyse maakt het nodig een doelmatige maat te vinden om de grootte van een willekeurig samenstel van productiemiddelen ($k_1$, $k_2$, ... ..... $k_n$) te meten. Deze doelmatigheid bestaat uit niets anders dan uit de eigenschap dat de gekozen maat ons in staat stelt om de grootte van alle mogelijke samenstellen ($k_1$, $k_2$), ($k_1$, $k_2$, $k_3$) of ($k_1$, $k_2$, .....$k_7$) met elkaar te vergelijken. Dit nu kan alleen gebeuren als men er voor zorgt, dat de eenheden, waarin wij de grootten uitdrukken, alle van dezelfde dimensie zijn. D.w.z. dat wij in ieder geval een wortelexponent moeten kiezen, die gelijk is aan het in het onderhavige geval gebruikte aantal productiefactoren. Hieruit volgt dat een vierkantswortel optreedt als wij een samenstel van 2 factoren gebruiken, een derdemachtswortel bij het gebruik van een samenstel van 3 factoren en een zevendemachtswortel bij een samenstel van 7 factoren, Dit is toch allerminst aprioristisch en alvorens tot de critiek over te gaan had mijn opponent deze gehele materie werkelijk grondiger moeten bekijken.

Wanneer wij nu verder overwegen, dat uit het bovenstaande blijkt, dat een fundamentele moeilijkheid voor *van der Schroeff* gelegen is in het meest elementaire principe van iedere kwantitatieve wetenschap en wij lezen dan zijn weinig terzake doende beschouwingen over de wetten van *Proust, Liebig, Mitscherlich* en *Guldberg & Waage*, dan dringt zich de gedachte op, dat zijn gehele artikel ietwat geforceerd en onevenwichtig gesteld is. Omdat zijn bovengenoemde opmerkingen in hoofdzaak een zijdelings verband houden met een voorbeeld, dat *Limperg* eens gegeven heeft, zal ik hier niet nader op ingaan. Evenmin zal ik dit doen op de opmerkingen van mijn opponent dat *Limperg* de moeilijkheid van het niet bepaalbaar zijn van $\tau$ zou hebben opgelost door voor de technisch juiste proportionaliteit de verhouding aan te nemen waarin geacht kan worden, dat die middelen zich in het resultaat bevinden [6]).

*Van der Schroeff* behoorde zich ten aanzien van deze punten met een afzonderlijke beschouwing tot *Limperg* te richten. Dit had naar mijn mening - ook in verband met de publicatie van L.Q. - reeds veel eerder geschied dienen te zijn.

Heb ik in het bovenstaande de afwijzende critiek terug gewezen, dan blijft er nog over om de resultaten, die met de maat $t = \sqrt[n]{k_1 . k_2 . \ldots\ldots k_n}$ bereikt zijn, op te sommen en, nog eens weer, toe te lichten. Laat ik dan beginnen met op te merken, dat een maat slechts op één manier kan worden beoordeeld, n.l. door de bruikbaarheid, die zij getoond heeft te bezitten. En als bovenstaande $t = \sqrt[n]{k_1 . k_2 \ldots\ldots k_n}$ ons in staat stelt om een rationele definitie van $\tau$ te vinden, waarvan *achteraf de rationaliteit, los*

[4]) T.a.p. blz. 109.
[5]) T.a.p. blz. 109.
[6]) T.a.p. blz. 102.

*van iedere problematiek van vierkantwortels, eenhedenkeus e.d. blijkt,* dan is zij alleen hierom reeds bruikbaar. Wanneer ik dus bewijs, dat de door mij gegeven definitie

$$\tau = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{\delta p}{\delta k_2}}{\frac{\delta p}{\delta k_1}}$$

een critisch punt aangeeft, waarvan het, wanneer het op zijn eigen mèrites beoordeeld wordt, redelijk is te zeggen, dat het technisch betere resultaten geeft dan alle andere punten van de isoquante, heb ik aan twee eisen voldaan. In de eerste plaats heb ik dan mijn definitie van $\tau$ nader bevestigd en in de tweede plaats is dan achteraf de doelmatigheid van $t = \sqrt[n]{k_1 . k_2 \ldots\ldots k_n}$ opnieuw komen vast te staan.

Nu is het niet zo, dat ik dit bewijs èn in B I & II èn in een grote artikelenreeks niet reeds vele malen heb gegeven. Maar *van der Schroeff* gaat op al deze zaken volstrekt niet in. Hij geeft er de voorkeur aan om zich te beroepen op *Dr Diepenhorst* [7]) zonder zich iets aan te trekken van het antwoord dat ik *Dr Diepenhorst* gegeven heb [8]). Dat hij ons meedeelt, dat hij niet aarzelt om mijn stellingen onbewezen te noemen, bewijst wel iets voor zijn koelbloedigheid, maar volstrekt niets tegen de gegeven bewijzen van mijn stellingen. Door mij is n.l. het volgende bewezen:

1. Naarmate de wet van de afnemende meeropbrengst sterker werkt, verloopt de isoquante steiler. (B. II pag. 146).
2. Op het punt waar de isoquante de orthogonale hyperbool $t^2 = k_1 . k_2$ raakt werkt de wet van de afnemende meer-opbrengst zwakker dan op enig ander punt van de isoquante (B II pag. 178).
3. Dit sub 2 aangegeven punt is het critische punt $\tau$.

In overeenstemming hiermee heb ik in het M.A.B. 1952 no. 4 blz. 146 in een polemiek met de Heer van Kampen geschreven:

> „De orthogonale hyperbool $H_1$ $H_2$ geeft dus een werking van de afnemende meeropbrengst aan, die constant is en steeds kleiner is dan die van de werkelijke isoquante $I_1$ $I_2$ behalve in het punt $\tau$, waar afnemende meeropbrengst voor $I_1$ $I_2$ gelijk is aan die van $H_1$ $H_2$.
>
> De verschillen ten dezen opzichte tussen $I_1$ $I_2$ en $H_1$ $H_2$ zijn uit de tekening afleesbaar. Zij worden voor een constante hoeveelheid product n.l. aangegeven door de stukjes $A_1$ $B_1$, $A_2$ $B_2$ enz. tot $\tau$. (zie tekening t.a.p. pag. 145). Deze stukjes geven dus aan hoeveel productiemiddel $k_2$ ceteris paribus meer gebruikt wordt ingeval het verloop is $I_1$ $I_2$ dan $H_1$ $H_2$. Een zelfde redenering kan men opstellen voor de tak $\tau$ $H_2$.
>
> Uit een en ander volgt dat als het waar is:
>
> 1e. dat de wet van de afnemende meeropbrengst op zich zelf de productiekosten (gemeten in goederen quantiteiten) doet stijgen.
>
> 2e. in ieder bepaald geval deze wet de minste uitwerking heeft in het punt $\tau$ .

---

[7]) T.a.p. blz. 110.
[8]) M.A.B. jaargang 26 no. 4, blz. 149/155.

het rationeel is om dat punt te betitelen als technisch juiste proportionaliteit. Ik wil hierbij nu het volgende opmerken. In dit stadium (en eigenlijk reeds in een veel vroeger stadium) van het debat is iedere oppositie tegen het gebruik van de nevenconditie $k_1^{1/2} \cdot k_2^{1/2} = c$ een langs de zaak heenpraten zolang de onjuistheid van bovenstaand betoog (dat, zoals gezegd, in een iets andere vorm reeds in B II §86 is te vinden en bovendien in mijn polemiek met *Prof. v. d. Schroeff*) niet is aangetoond."

Om dit alles nog eens duidelijk te zeggen:
zolang *v.d. Schroeff* niet heeft aangetoond dat het niet waar is, dat

a. in het punt $\tau$ de werking van de wet van de afnemende meeropbrengst minimaal is,
b. het doelmatig is om dit minimum-punt, het punt van de technisch juiste proportionaliteit te noemen

is zijn ontkenning van de mogelijkheid om $\tau$ te berekenen een aprioristische redenering. Hij kan zich aan de plicht om de onjuistheid van deze stellingen te bewijzen, niet onttrekken, gezien het feit dat ik sinds jaar en dag de juistheid ervan bewezen heb en hij nochtans met deze bewijzen geen enkele rekening heeft gehouden. Maar als dit bewijs hem niet lukt en aldus de ontkenning van de doelmatigheid van de maat $t = \sqrt[n]{k_1 \ldots \ldots k_n}$ teruggebracht is tot niet meer dan een gratuite bewering dan is tevens komen vast te staan, dat de volgende afleidingen van $\tau$ door de critiek van mijn collega op geen enkele manier worden getroffen.

1. met behulp $t = \sqrt[n]{k_1\ k_2 \ldots\ldots k_n}$ door het minimaliseren van t bij een gegeven hoeveelheid product (B II § 77)
2. met behulp van $t = \sqrt[n]{k_1,\ k_2 \ldots\ldots\ k_n}$ door het maximaliseren van de hoeveelheid product bij een gegeven hoeveelheid technische kosteneenheden (t) (B I § 85).

Ik herhaal: al deze afleidingen berusten op de vorm $t = \sqrt[n]{k_1\ k_2 \ldots\ldots k_n}$ en leiden ook tot de hierboven genoemde conclusies a en b. Of dit alles nog eens duidelijker gezegd:
Als tegen de ± 130 pagina's tekst, bevattende positieve analyse en anticritiek, die door mij in B I en B II en in het M.A.B. uitsluitend aan de berekening van $\tau$ zijn gewijd *van der Schroeff* tenslotte na 2 jaren niet anders weet in te brengen, dan dat een in werkelijkheid door mij niet gebruikte vierkantswortel aprioristisch is en als hij verder enige vragen stelt die in het vroeger gepubliceerde alle hun beantwoording vinden, dan ben ik gerechtigd tot de conclusie, dat het aantal van zijn argumenten zeer gering en hun inhoud waardeloos is. En ook de door mijn collega in het M.A.B. Maart 1953 pag. 109 te berde gebrachte bezwaren tegen mijn inleidende popularisatie, die ik ter wille van de wiskundig ongeschoolde lezers heb gegeven in B I pag. 80 en in het M.A.B. 1951 pag .100 zijn dan niet eens meer redelijk te noemen.

Mijn collega zal moeten kiezen tussen 2 mogelijkheden:
Of hij levert de bij herhaling en ook nu weer gevraagde tegenbewijzen, of hij erkent zich te hebben vergist.

Nog een enkel woord wil ik wijden aan de questie der prioriteit. *Van der Schroeff* stelt het voor (M.A.B. Maart 1953, pag. 101) alsof hier

van een simpele prioriteitsvraag sprake zou zijn. Niets is echter minder waar dan dat en ik wil hierover het volgende opmerken:
Zoals de lezer zich zal herinneren loopt het verschil over de z.g. prioriteitskwestie, over de bepaling van de irrationele phase van de productiecurve. Dit is een ander probleem als het bepalen van het critische punt $\tau$. Nu is ook op het gebied van de afleiding en de constructie van deze curve door mij nog al wat oorspronkelijk werk verricht, zonder dat ik ooit enige prioriteit heb laten gelden. Wat doet echter *Van der Schroeff?* In L. Q. pag. 42 veroorlooft hij zich om van zijn inzichten te zeggen, dat zij afwijken van de literatuur en bovendien dat hij op dit gebied een verruiming heeft aan te bieden. Het ontoelaatbare hierin en waartegen ik reeds in het art. van 1951 bezwaar maakte, schuilt in het feit dat mijn collega in een geschrift, waarin hij mijn werk critiseert met de mededeling komt, dat hij nieuwe ideeën zal brengen en bovendien zegt af te wijken van de literatuur, terwijl deze ideeën en de afwijking al voor komen in het door hem gecritiseerde werk van mijn hand. En hoe rijmt hij deze bewering omtrent de verruiming, die hij heeft aan te bieden en zijn afwijkingen van de literatuur met de opmerking in zijn laatste artikel:
„de literatuur is ons, wat deze stelling betreft reeds voor geweest"?

De contradictie is niet onaardig. Maar toon en strekking van deze pagina's zijn in wezen nog bezwaarlijker. Als *van der Schroeff* schrijft:

> „Ik ben er van overtuigd collega K. aan mijn zijde te zullen vinden, wanneer ik zeg, dat - los van de prijzen - een aantal kwantitatieve verhoudingen als ondoelmatig ter zijde kunnen worden gezet [9])."

is er een bedenkelijke discrepantie tussen de indruk, die hier wordt gewekt en de feiten. De indruk, die hier n.l. gewekt wordt is, alsof mijn ambtgenoot mij iets nieuws komt vertellen, waarvan hij vermoedt, dat ik het er wel mee eens zal zijn. De waarheid is echter, dat hij weet, dat ik deze zaken reeds jaren geleden en eerder dan hij, heb gepubliceerd. Er is hier geen vraag van prioriteit, maar wel een van signifische juistheid.

En tot slot van dit punt moet ik de verdediging van mijn opponent dat hij van B II tijdens zijn colleges geen kennis kon nemen als niet terzake doende terugwijzen. B. II is n.l. verschenen in Nov. 1949; onmiddellijk na de verschijning ontving *van der Schroeff* een present-exemplaar. L.Q. kwam niet eerder van de cyclostyleermachine dan in Juli 1951. Bovendien heeft *van der Schroeff* een recensieexemplaar ontvangen, dat hij geruime tijd te zijner beschikking heeft gehad. Een recensie heeft hij echter niet geschreven.

Klaarblijkelijk verkoos hij tot op heden het clair-obscuur van een in de boekhandel gebracht collegedictaat boven een tijdschriftartikel.

Het is niet onmogelijk, dat deze discussie toch nog nut zal opleveren voor het binnenkort te verschijnen boek over het onderwerp, dat mijn opponent aankondigt.

Ongetwijfeld zal hij duidelijk doen uitkomen of en in hoeverre mijn veelvuldige publicaties over deze materie zijn conclusie's hebben beïnvloed.

[9]) M.A.B. 1953 pag. 110.