KWANTITATIEF DENKEN

door Prof. Dr. J. P. M. Geurts

Waar de beoefenaar van een empirische wetenschap steeds meer inzicht tracht te verkrijgen in de verbanden tussen de dingen die hem omgeven en in de structuren van de gebeurtenissen waarmee hij geconfronteerd wordt, ligt het voor de hand dat hij naast de kwalitatieve beschrijving van deze verbanden en structuren ook een kwantitatieve uitdrukking daarvan nastreeft. Hoewel beide, d.i. zowel de kwalitatieve als de kwantitatieve uitdrukking van het onderzochte fenomeen, het voortschrijdend onderzoek markeren, lijkt niettemin het kwantitatieve taalgebruik een steeds ruimere plaats voor zich op te eisen. Het is zelfs aan geen twijfel onderhevig dat juist de kwantitatieve aanpak van de problemen een snelle ontwikkeling van de empirische wetenschappen bevordert heeft. Ten aanzien van de economische wetenschap valt daarnaast overigens ook aan de betekenis van toenemende datavergaring te denken.

Met opzet spreek ik hier van een kwalitatieve en kwantitatieve *aanpak* of van een kwalitatief en kwantitatief *taalgebruik*. Het gaat immers niet om dingen of gebeurtenissen die als zodanig kwalitatief of kwantitatief zouden zijn, maar over een kennende benadering, die met gebruikmaking van kwalitatieve en kwantitatieve begrippen, deze dingen en gebeurtenissen zo verantwoord mogelijk tot uitdrukking tracht te brengen. Men kan van objecten zeggen dat ze zwaar of licht zijn, met kan ook zeggen dat sommige zwaarder zijn dan andere, en men kan wellicht zeggen dat bepaalde objecten twee of drie maal zo zwaar zijn als andere. We hebben hier met verschillende uitspraken te doen die ieder op correcte wijze een stand van zaken uitdrukken, maar die op grond van anderssoortige ervaring tot stand gekomen zijn. Het is bovendien duidelijk dat i.h.a. uitspraken van de laatste soort meer informatie bieden dan uitspraken van de eerste en tweede soort en dat zulks ten nauwste samenhangt met de experimentele situatie waarin de betreffende ervaring werd opgedaan. In alle drie de gevallen verkregen we een begrip van zaken door objecten met elkaar te vergelijken, maar terwijl we in het eerste geval de objecten slechts groepeerden als lichte en zware objecten, brachten we in het tweede geval een ordening aan, waarbij we gebruik maakten van de ervaring dat enerzijds een aantal objecten even zwaar was en dat anderzijds een aantal objecten zwaarder was dan de overige; in het derde geval verkregen we tenslotte een nadere precisering door een operatie uit te voeren, waardoor deze relaties ook getalmatig tot uitdrukking gebracht konden worden. Niet het object is kwalitatief en kwantitatief van aard, maar onze begriippelijke entree tot dat object verloopt kwalitatief of kwantitatief. In de eerste twee gevallen beschreven we onze ervaring met kwalitatieve begrippen i.c. klassificerende en comparatieve begrippen, in het derde geval maakten we van kwantitatieve begrippen gebruik.

Na deze globale schets waarin we een onderscheid tussen klassificerende, comparatieve en kwantitatieve begrippen aanbrachten, is het niet moeilijk om aan te geven wat we onder een van de fundamentele operaties in het

empirisch onderzoek verstaan t.w. de meting. Met „meting” bedoelen we een handeling of een reeks handelingen waarin we objecten in deze zin met elkaar vergelijken dat we, gebruik makend van de ervaring dat zij bijv. „even zwaar zijn als” en „zwaarder zijn dan”, deze onderbrengen in een systeem waarvoor we regels hebben opgesteld, die het enerzijds tot een comparatief systeem maken en die dit anderzijds op zulk een wijze doen, dat de in de experimentele situatie als equivalentie- en comparatieve relaties beschouwde verbanden als soortgelijke relaties in het systeem zijn terug te vinden, en dat de resultaten van zulk een vergelijking, op grond van een willekeurig gekozen basissituatie als eenheid, getalmatig kunnen worden uitgedrukt. Een analyse van de wijze waarop we klassificerende, comparatieve en kwantificerende begrippen invoeren; moge deze omschrijving verduidelijken.

De meest eenvoudige wijze waarop wij dingen vergelijkend tot een eerste begrip van zaken komen, is door de objecten of gebeurtenissen waarop ons onderzoek gericht is, en waarvan we in het vervolg zullen zeggen dat ze tot het domein van onderzoek behoren, in een aantal onderscheiden klassen onder te brengen. Een verdeling van gekleurde objecten over klassen van rode, blauwe, oranje, groene, violette en gele dingen is een voorbeeld van zo'n klassificatie. Hoewel een dergelijke klassificatie op het eerste gezicht een louter willekeurig of zo men wil een conventionele aangelegenheid schijnt te zijn, is zij in zoverre toch ook empirisch medebepaald, dat ze allereerst gebonden is aan de klassificatiemogelijkheden die de objecten bieden - marktwaarden van goederen kan men niet naar kleur rangschikken -, en dat zij vervolgens om adequaat hanteerbaar te zijn, zal moeten voldoen aan de eis, dat elk object uit het domein van onderzoek deel uitmaakt van tenminste één klasse en hooguit één klasse. De indeling in klassen moet uitputtend zijn en de klassen zelf moeten disjunct zijn.

Het spreekt vanzelf dat lang niet iedere klassificatie aan deze eis van uitputtendheid en disjunctie van klassen voldoet. Een object dat turquoise van kleur is, kan ofwel niet ondergebracht worden in het boven aangegeven kleurenschaal, ofwel behoort zowel tot de klasse van de groene als tot de klasse van de blauwe dingen. Een van de eerste opgaven waarvoor een onderzoeker die een klassificatie wil aanbrengen zich in dit verband dan ook gesteld ziet, is om deze zo uit te voeren, dat aan de zojuist genoemde bruikbaarheidseisen zo veel mogelijk voldaan wordt. Definitorisch kan dat in de meest absolute zin, door de objecten uit het domein van onderzoek over twee klassen te verdelen, en wel zo dat alle objecten met een bepaalde eigenschap tot de éne en alle andere objecten tot de andere klasse behoren. Er zijn dan in het geheel twee klassen van objecten: die met de eigenschap a en die met de eigenschap $\bar{a}$ (niet- a). Zo berustte eertijds het onderscheid tussen organische en anorganische verbindingen op een dergelijke logische klassificatie; onder organische stoffen verstond men dan verbindingen die slechts door levende wezens tot stand gebracht konden worden, alle andere verbindingen werden anorganisch genoemd.

Veel moeilijker is aan deze eis van uitputtendheid en disjunctie van klassen te voldoen, als de klassificatie wordt uitgevoerd aan de hand van eigenschappen die onafhankelijk van elkaar bepaald zijn. Men moet dan in zekere zin

maar afwachten of ook de facto aan deze eis voldaan wordt. De uitspraak dat alle chemische verbindingen ofwel organisch ofwel anorganisch van aard zijn, is dan geen analytische uitspraak meer, maar een uitspraak die hoewel wellicht waar, principieel falsifieerbaar is. Daar staat echter tegenover dat zulk een empirische klassificatie, door de positieve begripsbepalingen die eraan ten grondslag liggen, veel meer informatie biedt dan de zojuist genoemde logische klassificatie.

Het is met name van deze empirische klassificatie, dat zowel in het wetenschappelijk onderzoek als in het dagelijkse leven gebruik gemaakt wordt. Men zou in dit verband kunnen denken aan de meest eenvoudige inventarisatie waarmee het onderzoek begint: de econoom wil weten welke goederen tot de eerste levensbehoeften van de mens gerekend worden of hoe in een bepaalde regio de beroepsbevolking is samengesteld, de fysicus stelt een lijst van elementaire deeltjes op, de anorganisch-chemicus brengt een verdeling in zouten, zuren en basen aan, en de bioloog houdt zich o.a. met een plantensystematiek bezig. In vele gevallen biedt zo'n klassificatie de onderzoeker niet alleen de mogelijkheid om een groot aantal gegevens in meerdere of mindere mate samen te vatten, maar brengt ze hem ook op het spoor van regelmatigheden, die hem in staat stellen om bepaalde wetmatige uitspraken te formuleren. Dat deze klassificatie overigens, evenals trouwens de nog te bespreken comparatieve en kwantitatieve ordening,¹⁾ juist vanwege zijn empirisch-pragmatisch karakter, bij voortduring voor wijziging open staat, behoeft geen nader betoog. Binnen het kader van een empirische wetenschap kan dat echter nauwelijks als inconvenient worden aangemerkt.

Hoewel we er in het voorgaande de nadruk op hebben gelegd, dat in de klassificatie van objecten en gebeurtenissen reeds een eerste begrip van zaken tot uitdrukking kwam, is dit begrip van zaken toch nog vrij oppervlakkig. Het rangschikken van objecten als zware, lichte en middelzware objecten is zeker met betrekking tot het wetenschappelijk onderzoek onbevredigend, omdat de klassen niet alleen begripsinhoudelijk te groot zijn om gedetailleerd onderzoek mogelijk te maken, maar zij ook onvoldoende met elkaar in verband gebracht worden, om een onderzoek naar de onderlinge samenhang der dingen niet al te zeer te beperken. Aan althans het eerste bezwaar zou men niettemin tegemoet kunnen komen door het domein in een veel groter aantal klassen op te delen. Om tot een acceptabele, d.i. tot een ten behoeve van het onderzoek gewenste begripsdifferentiatie te komen, zou dit aantal in veel gevallen echter zo groot worden dat de beoogde overzichtelijkheid weer geheel verloren zou gaan. Een veel aantrekkelijker en doelmatigere wijze om tot deze nadere differentiatie te komen, is gelegen in de invoering van zgn. comparatieve begrippen, die een ordening op basis van „groter dan”- of „zwaarder dan”-relaties tot stand brengt. De objecten worden dan niet alleen over een veel groter aantal klassen verdeeld, maar de klassen worden bovendien ook in een bepaalde volgorde-relatie gebracht. Of een bepaalde klassificatierij ook de facto in een comparatieve ordeningsrij kan worden overgevoerd, is overigens afhankelijk van de mogelijkheid om voor deze comparatieve

¹⁾ Hoewel men van ordening pas spreekt als een klassificatie ook comparatief is, zullen we om redenen van duidelijkheid steeds over een *comparatieve* ordening blijven spreken.

ve relaties een empirisch analogon te vinden. Er moet dan kunnen worden vastgesteld of twee objecten empirisch equivalent zijn - en zij dus net als in het geval van de loutere klassificatie tot eenzelfde klasse behoren - en vervolgens moet kunnen worden vastgesteld of er tussen de klassen een empirische volgorde-relatie bestaat. We zullen nu aangeven aan welke voorwaarden een empirisch systeem moet voldoen om comparatief genoemd te kunnen worden. De equivalentie-relatie zullen we als E schrijven, de volgorde-relatie zullen we als V noteren.

Van een equivalentie-relatie zal men dan eisen dat zij reflexief, symmetrisch en transitief is. In termen van relatie-logica formuleert men deze voorwaarden als volgt:

- 1 Voor iedere x geldt xEx . Elk object uit ons domein is, voor zover het dit domein betreft, gelijk aan zich zelf. Deze voorwaarde wordt op logische gronden gesteld.
- 2 Voor iedere x en y geldt dat als xEy ook yEx . Als x equivalent is aan y , dan is y ook equivalent aan x . Of aan deze voorwaarde voldaan is, zal experimenteel moeten worden uitgemaakt.
- 3 Voor iedere x , y en z geldt als xEy en yEz ook xEz . Als x equivalent is aan y en y is equivalent aan z , dan is ook x equivalent aan z . Ook ten aanzien van deze voorwaarde geldt dat de wijze waarop we de equivalentie empirisch bepalen, maakt of hieraan voldaan wordt: de ruilwaarde van een object moet zodanig bepaald zijn, dat als ze voor x en y , resp. y en z gelijk is, ze ook voor x en z gelijk is.

Ten aanzien van de volgorde-relatie worden de voorwaarden geformuleerd:

- 4 a. Voor iedere x geldt dat als xEx dan $\overline{xVx}$, of nog royaler:
b. Voor iedere x en y geldt dat als xEy dan $\overline{xVy}$. Aan deze voorwaarde van irreflexiviteit is altijd voldaan krachtens een eis van logische consistentie, die aan het systeem in deze zin gesteld wordt, dat men er van uitgaat dat als twee objecten even zwaar zijn, de een niet zwaarder is dan de ander. De uitdrukking 4a behoeft eigenlijk niet expliciet vermeld te worden, daar ze met behulp van xEx uit 4b is af te leiden.
- 5 a. De volgorde-relatie is asymmetrisch: voor iedere x en y geldt dat als xVy dan $\overline{yVx}$. Als x zwaarder is dan y , dan is y niet zwaarder dan x . Deze asymmetrie kan nog nader bepaald worden als een transitiviteit:
b. Voor iedere x , y en z geldt dat als xVy en yVz ook xVz . Ook in dit geval behoefde de uitdrukking sub a niet vermeld te worden, daar deze middels 4a uit 5b afleidbaar is.

Een systeem dat aan de voorwaarden 1 t/m 5 voldoet, noemt men partieel geordend. De ordening is niet volledig, omdat nog niet geëist is dat voor elk paar objecten de equivalentie- dan wel de volgorde-relatie geldt. We voegen daarom als voorwaarde toe:

- 6 Voor iedere x en y geldt $(xEy) \vee (xVy) \vee (yVx)$. x is ofwel gelijk aan y , ofwel gaat vooraf aan y , ofwel volgt op y .

Als ook aan deze laatste voorwaarde voldaan is houdt het systeem een volledige comparatieve ordening in, in de anglo-saksische literatuur ook wel *quasi-serial ordering* genoemd. De objecten uit ons domein van onderzoek zijn dan alle in klassen ondergebracht en tussen deze klassen bestaat een

geregelde volgorde. Op veel effectievere wijze dan binnen het kader van een loutere klassificatie, zijn we nu in staat om objecten met elkaar te vergelijken en ons begrip van zaken tot uitdrukking te brengen. Zelfs waar klassificatie de facto een verdeling van objecten over een even groot aantal klassen te zien zou geven als door comparatieve ordening verkregen kan worden, hetgeen overigens meestal niet het geval is, biedt deze laatste door de mogelijkheid om ook van een volgorde-relatie gebruik te maken, naast het voordeel van de eenvoudigere operatie voor het bepalen van de klasse waarin het object thuis hoort, ook het voordeel van de onderlinge positiebepaling van de klassen. We behoeven in dit verband slechts te wijzen op de mogelijkheid om met een balans een veelheid van objecten naar opklimmend gewicht te rangschikken. Op overeenkomstige wijze kan men met behulp van een thermometer objecten naar toenemende warmtegraad ordenen en kan men met behulp van een krasproef mineralen op hun hardheid met elkaar vergelijken. Tenslotte blijkt de comparatieve ordening in veel gevallen ook een vruchtbaar uitgangspunt van voortgezet onderzoek te zijn. Op de bijdrage voor het kwantitatieve onderzoek zullen we nog uitvoerig ingaan. Het voorbeeld van het periodiek systeem van de elementen in de scheikunde moge herinneren aan de, in verband met deze systematisering, nieuw verworven inzichten met betrekking tot de eigenschappen van chemische verbindingen en de regelmatigheden die zich daarbij blijken voor te doen.

Hoewel we, zoals in het voorbeeld van de hardheidsgraden van mineralen, er niet altijd in slagen om een comparatieve ordening in een kwantificerende over te voeren, doen comparatieve begrippen zich toch als eerste aanleg van kwantitatieve begrippen voor, en biedt de comparatieve ordening in veel gevallen een adequaat uitgangspunt voor de constructie van een kwantitatief systeem. Onder kwantificatie kunnen we dan ook een operatie verstaan, waardoor aan objecten die door een equivalentie- en volgorde-relatie comparatief geordend zijn, door middel van een bepaalde functie f getallen worden toegevoegd, die deze comparatieve verbanden enerzijds handhaven en anderzijds nader specificeren. De equivalentie relatie xEy gaat daarbij over in twee gelijke getallen, de volgorde relatie xVy levert de getallen $f(x) < f(y)$ op. Deze kwantificerende operatie houdt een objectivering van de comparatieve relaties in en bewerkstelligt een isomorfie tussen het getalbereik en de klassen van de comparatieve ordeningsrij. De voorwaarden waaraan f ter interpretatie van de equivalentie- en volgorde-relatie moet voldoen, zijn dan ook:

7 De functie f moet aan iedere x uit ons domein een reëel getal $f(x)$ toevoegen.

8 a. Voor iedere x en y geldt dat als xEy dan ook $f(x) = f(y)$.

9 a. Voor iedere x en y geldt dat als xVy dan ook $f(x) < f(y)$.

Op grond van de voorwaarden 1 t/m 5 die de equivalentie- en volgorde-relatie nader bepalen, geldt dan eveneens:

8 b. Voor iedere x en y geldt dat als $f(x) = f(y)$ dan ook xEy .

9 b. Voor iedere x en y geldt dat als $f(x) < f(y)$ dan ook xVy .

Door de functie f aan deze voorwaarden te binden, zijn we in staat om aan de objecten die deel uitmaken van een comparatieve ordeningsrij op eenduidige wijze getallen toe te voegen, waarbij de empirische equivalentie- en

volgorde-relaties in „gelijk als” en „kleiner dan” relaties voor getallen overgaan. De getallen die op deze wijze aan de objecten uit ons domein van onderzoek worden toegevoegd, geven een bepaalde rangorde aan en vormen een zgn. ordinale schaal. Deze schaal is uiteraard invariant voor monotone transformaties.

Veeleer dan ranggetallen beoogt de kwantisering van een comparatieve ordeningsrij echter maatgetallen op te leveren. We zijn niet zozeer in de toekenning van getallen als oplopende nummering van comparatieve klassen geïnteresseerd, als wel in de mogelijkheid om gebruik te maken van de operaties, die met het getalmatig karakter van de toegevoegde grootheden samenhangen. Om dit te bereiken zal met name voorwaarde 9 nader gespecificeerd moeten worden. Hiervan hangt dan tevens af of we in feite zgn. extensieve grootheden, dan wel intensieve grootheden invoeren. Op beide mogelijkheden om een ordeningsrij te kwantiseren zullen we nu nader ingaan.

Wat dan de kwantisatie met behulp van extensieve grootheden betreft, gaat het om een ordening, waarin aan objecten bijvoorbeeld een bepaalde lengte uitgedrukt in meters, een bepaald gewicht in grammen, of een bepaalde prijs in guldens wordt toegekend. Om tot een dergelijke ordening te komen, zullen we allereerst een eenheidswaarde voor de betreffende grootte moeten invoeren. Dit houdt over het algemeen de keuze van een object of gebeurtenis in, welke gemakkelijk te reproduceren is en waaraan een standaardwaarde, bijv. 1, wordt toegekend. De keuze van zo'n eenheid komt binnen een empirische kontekst tot stand, en is in deze zin dan ook geen louter formele aangelegenheid. Dat komt nauwelijks tot uiting in de keuze van de kilo als gewichtseenheid naar het prototype dat in Parijs bewaard wordt, ofschoon ook deze keuze door allerlei empirische randvoorwaarden omringd is. Duidelijker komt dat tot uitdrukking in de keuze van de meter als lengte-eenheid: volgens artikel 1 van de ijkwet van 1937 is de meter „de lengte gelijk aan 1650763,73 golflengten, in het luchtledige, van de straling, overeenkomend met de overgang tussen de toestanden $2p_{10}$ en $5d_5$ van het atoom krypton 86”.

Behalve de vaststelling van een standaardwaarde, veronderstelt de invoering van een extensieve grootte ook de mogelijkheid, om met behulp van een empirische operatie de objecten van onderzoek te combineren op een wijze die vergeleken kan worden met de wiskundige additie-operatie. De invoering van extensieve grootheden houdt dan ook slechts een adequate kwantisering in, als de objecten uit een comparatieve ordeningsrij op een zodanige wijze empirisch gecombineerd kunnen worden, dat het door de functie f aan deze combinatie toegevoegd getal, gelijk is aan de som van de getallen die door deze functie aan ieder van de afzonderlijke objecten werd toegevoegd. Men formuleert dit meestal als: voor iedere x en y uit ons domein geldt dan $f(xoy) = f(x) + f(y)$, waarbij het teken o voor een empirische combinatie staat, zoals het naast elkaar plaatsen van gewichten, het bij elkaar voegen van vloeistoffen, het achter elkaar leggen van maatlatten of het gezamenlijk aanbieden van goederen. De getallen $f(x_i)$ zijn nu maatgetallen geworden en kunnen op een zgn. verhoudingsschaal ondergebracht worden. De maateenheden kunnen daarbij verschillend gekozen worden: men kan

gebruik maken van een centimeterschaal, maar men kan ook meten met een duimstok. De schaal is voor de keuze van de eenheid invariant.

Door op deze wijze, geheel in overeenstemming met de voorwaarden 7, 8 en 9, een comparatieve ordeningsrij extensief te kwantiseren, heeft men dus een verband aangebracht tussen enerzijds de empirische relaties E en V en de empirische operatie o , en anderzijds de rekenkundige relaties $=$ en $<$ en de rekenkundige operatie $+$. Het ligt dan ook voor de hand dat aan de op deze laatste relaties en operatie betrekking hebbende geldige rekenkundige uitspraken, empirische uitspraken op basis van de E en V relaties en de operatie o beantwoorden. Bij wijze van voorbeeld zullen we enige daarvan geven en de laatste daarvan, eveneens bij wijze van voorbeeld, nader toelichten.

a. Voor iedere x en y geldt $(xoy) E (yox)$. In een extensief gekwantiseerd systeem maakt het niet uit of we x bij y voegen, dan wel y bij x voegen. De operatie o is commutatief.

b. Voor iedere x , y en z geldt $x o (yoz) E (xoy) o z$. De operatie o is associatief.

c. Voor iedere w , x , y en z geldt dat als wEx en yEz dan ook $(woy) E (xoz)$.

d. Voor iedere w , x , y , en z geldt dat als wEx en yVz dan ook $(woy) V (xoz)$. Immers, als wEx en yVz dan geldt volgens 8a en 9a: $f(w) = f(x)$ en $f(y) < f(z)$. Op rekenkundige gronden volgt dan $f(w) + f(y) < f(x) + f(z)$. Volgens 9b geldt dan echter ook $(woy) V (xoz)$, wat we bewijzen moesten.

Hoe gestroomlijnd dit alles er ook uit ziet, men moet zich overigens toch realiseren, dat het zonder meer van de objecten, waarmee men bezig is, afhangt, of een dergelijke kwantisering mogelijk is. Men zal bijvoorbeeld ten aanzien van de sub a geformuleerde uitdrukking maar moeten afwachten of de prijs van een aantal goederen niet afhankelijk is van de volgorde waarin ze aangeboden worden. En hoewel men in een adequaat gekwantiseerd systeem mag stellen, dat $f(x_1 o x_2 o \dots o x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$, is het niet aan te nemen, dat voor een bepaald goed de markt zo inelastisch is, dat de prijzen ook bij sterke vergroting van het aanbod onveranderd blijven. Gold in de klassieke mechanica dat snelheden additieve grootheden waren, in de zin dat als een object a zich ten opzichte van een object b met een snelheid v_1 voortbeweegt en het object b zich in dezelfde richting ten opzichte van een object c met een snelheid v_2 voortbeweegt, de snelheid v_3 waarmee object a zich ten opzichte van object c voortbeweegt, uitgedrukt kon worden als $v_3 = v_1 + v_2$, thans weet men dat het hier niet om additieve grootheden kan gaan

en dat geldt $v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$ waarin c de lichtsnelheid voorstelt. Op overeen-

komstige wijze zijn hoeken die lijnstukken met elkaar maken additieve grootheden, maar zijn de sinusfuncties van deze hoeken dat niet: $\sin \alpha + \sin \beta \neq \sin (\alpha + \beta)$. Men wordt in al deze gevallen dan ook voor de keuze gesteld om van een extensieve kwantisering af te zien dan wel om de E en V relaties alsook de combinatie-operatie o zodanig te wijzigen of empirisch te conditioneren, dat extensieve kwantisering mogelijk wordt. Dat deze laatste oplossing in het kader van het onderzoek niet altijd de meest wenselijke is, moge aan de hand van de gegeven voorbeelden duidelijk zijn. Daar staat tegenover dat

de combinatie-operatie veelal ook weer niet zo beperkt empirisch bepaald is, dat extrapolaties in deze als ongeoorloofd beschouwd worden. Ook waar objecten te groot zijn om op de schalen van een balans geplaatst te worden, acht men naar analogie van de additieve eigenschap der reële getallen het gewicht van meerdere van deze objecten gelijk aan de som van de gewichten der afzonderlijke objecten.

Tot slot merken wij in dit verband nog op, dat de waarde van een bepaalde grootheid dikwijls op verschillende wijze d.i. volgens verschillende o-operaties bepaald wordt. Men kan de afstand tussen twee objecten bepalen door deze met behulp van een duimstok op te meten of door een driehoeksmeting te verrichten. Het is slechts op grond van praktische overwegingen, die met name betrekking hebben op de uitvoerbaarheid van de meetoperatie, dat men aan de ene werkwijze de voorkeur geeft boven de andere. De afstand tussen een vliegtuig en een zeker punt op aarde meet men met behulp van radar-echo-bepalingen, de afstand tussen twee atomen in een kristal stelt men met behulp van een röntgen-analyse vast. De empirische operaties die aan een dergelijke afstandsmeting ten grondslag liggen zijn verschillend, de grootheid die gemeten wordt is echter steeds dezelfde. Slechts weinig auteurs stellen zich op het standpunt dat dientengevolge ook over verschillende grootheden gesproken zou moeten worden. Wel wordt afhankelijk van deze empirische operaties, en evenzeer uit praktische overwegingen, een grootheid soms in verschillende eenheden uitgedrukt - hoeken in graden en radialen, afstanden in lichtjaren, kilometers en golflengten -, maar deze zijn, zoals we in het voorbeeld, dat we aan de ijkwet ontleenden, zagen, steeds tot elkaar herleidbaar.

Hoewel de specificatie van bovengenoemde voorwaarde 9 die tot de invoering van extensieve grootheden leidde, in vele gevallen een bruikbare kwantisering van een comparatieve ordeningsrij mogelijk maakt, is deze ten aanzien van comparatief geordende objecten waarvoor, zoals met betrekking tot de relatieve snelheid van een object of de rentabiliteit van een kapitaal, de rekenkundige additie geen analogon voor een empirische combinatie-operatie biedt, inadequaat. Het is ter bepaling van de gedachte misschien nog het gemakkelijkste om bij wijze van voorbeeld te bedenken, dat als twee vloeistoffen bij elkaar gevoegd worden, de temperatuur van de bij elkaar gevoegde vloeistoffen niet gelijk is aan de som van de temperaturen van de oorspronkelijke vloeistoffen. Toch gaat het om objecten, die met betrekking tot hun warmtegraad comparatief geordend kunnen worden en wier ordening getalmatig zo kan worden vastgelegd, dat de empirische equivalentie- en volgorde-relaties behouden blijven en dat aan de voorwaarden 7, 8 en 9 voldaan is. De vraag is dan ook op welke wijze voorwaarde 9 nader bepaald moet worden om ook in dit soort gevallen een kwantisering te verkrijgen, die ons toestaat met maatgetallen te werken en in aansluiting daarop van een metrische schaal gebruik te maken. Allereerst doet zich dan weer het probleem van de keuze van een waarde-eenheid voor. Ook hier wordt daarvoor een beroep gedaan op een empirisch gemakkelijk reproduceerbare situatie en, omdat een empirische combinatie die vergeleken zou kunnen worden met

een rekenkundige additie niet voorhanden is, in dit geval zelfs op twee van zulke situaties, waaraan dan de waarden 0 en 1 of 0 en 10 of een tweetal andere verschillende vaste waarden als aftelpunt geassigneerd worden. Met betrekking tot een temperatuursbepaling zou men daar bijvoorbeeld smeltend ijs en kokend water voor kunnen kiezen en er de waarden 0 en 1 aan toevoegen. De eenheidswaarde van de grootheid is daardoor in principe vastgelegd. Maakt men bij zijn waarneming nu gebruik van een kwikthermometer, dan refereert men in deze aan het verschil in lengte van de kwikkolom dat optreedt als men de thermometer in smeltend ijs en vervolgens in kokend water houdt. Om praktische redenen kan men natuurlijk ook een fractie van deze waarde bijv. $1/100$ deel als eenheid aanhouden.

In het hier gekozen voorbeeld, waarin voorwerpen naar warmtegraad (comparatief) geordend worden, gaan we ten behoeve van deze ordening uit van een basis-experiment, n.l. het inbrengen van een kwikthermometer, waarbij aan de equivalentie-relatie voldaan wordt in alle gevallen waarin de kwikkolom van de thermometer tot eenzelfde hoogte stijgt, en aan de volgorde-relatie wanneer de kwikkolom in het ene geval hoger stijgt dan in het andere. Verder hebben we de beschikking over een grootheid f die ons in staat stelt om aan de objecten uit ons domein ranggetallen toe te voegen, en hebben we de eenheid van deze vastgelegd door f aan twee gekozen situaties twee zeer bepaalde waarden te doen toevoegen. De functie f is daardoor echter nog niet voldoende gepreciseerd om aan ieder object of aan iedere situatie die tot ons domein behoort op eenduidige wijze een getal toe te voegen. De wijze waarop dit nu ten aanzien van intensieve grootheden geschiedt, is, dat men aan f de voorwaarde oplegt om aan equivalent geachte verschillen in empirische situaties, gelijke getalwaarde-verschillen toe te voegen. Wanneer de situaties w en x met betrekking tot het basis-experiment onderling op dezelfde wijze van elkaar verschillen als de empirische situaties y en z , wordt van f een getalmatig gelijke waardering van deze verschillen verwacht. Stelt men het verschil in empirische situatie door het symbool $\sim$ voor, dan zou men deze eis met gebruikmaking van de reeds bekende symbolen als volgt kunnen formuleren: als geldt $(w \sim x) \text{ E } (y \sim z)$ dan geldt ook $f(w) - f(x) = f(y) - f(z)$. Met betrekking tot ons voorbeeld betekent dit, dat als bij een warmtegraadmeting van w en x het verschil in lengte van de kwikkolom even groot is als het verschil dat optreedt bij zo'n meting van y en z , dan ook het temperatuurwaardeverschil tussen w en x getalmatig even groot is als dat tussen y en z . De grootheid f is dan zodanig bepaald dat zij aanleiding geeft tot de invoering van een metrische schaal, i.c. een zgn. interval-schaal en dat zij aan de objecten uit ons domein dus maatgetallen toevoegt. Deze schaal is invariant voor lineaire transformaties, d.w.z. transformaties van de vorm $x^1 = ax + b$ waarbij zowel a als b ongelijk 0 zijn: men kan de temperatuur meten in graden Celsius maar ook in graden Fahrenheit.

Ook ten aanzien van intensieve grootheden moet men er overigens op bedacht zijn dat de invoering ervan gebonden is aan een empirische operatie, die zodanig gekozen is dat aan de bovengestelde voorwaarden voldaan wordt, en dat het niet vanzelfsprekend is dat zo'n empirische operatie de facto ook altijd gevonden wordt. Evenals met betrekking tot extensieve

grootheden gaat het bovendien om de best mogelijke keuze van zulk een operatie en wordt er een beroep gedaan op empirische wetmatigheden; ook hier is men in laatste instantie dus van ervaringsgegevens afhankelijk. Dat verklaart waarom er ook ten aanzien van de invoering van intensieve grootheden soms meerdere basis-operaties ter beschikking staan; ik denk daarbij aan de temperatuurbepaling met behulp van een kwikthermometer, gebaseerd op de vrij regelmatige uitzetting van kwik bij verwarming (dat deze uitzetting „vrij regelmatig” is wordt overigens vastgesteld door vergelijking met een gasthermometer die berust op het limietgedrag van zeer verdunde gassen), en de meting met behulp van een thermo-element waarbij een beroep gedaan wordt op het feit dat de contactpotential tussen twee metalen bij verwarming toeneemt. Het verklaart ook, dat we in veel gevallen door onvoldoende inzicht in de voorhanden materie niet tot adequate kwantisering kunnen komen, zoals in het geval van de beoordeling van iemands muzikaliteit, zijn vermogen om zich te concentreren, zijn vermogen om leiding te geven e.d. We ondernemen op dit vlak wel schuchtere pogingen - denk aan de vaststelling van iemands intelligentie-quotiënt, de meting van iemands prestatie-motivatie e.a. - maar we zijn er ons tegelijkertijd van bewust hoe beperkt de operationele waarde van deze kwantisering is. Het lijdt echter geen twijfel, dat naarmate het onderzoek voortschrijdt en de onderzoekers er beter in slagen om hun domein van onderzoek te structureren, naast een kwalitatieve aanpak van de problemen de mogelijkheden voor een kwantitatieve aanpak groeien.

Een dergelijke aanpak ware ook te wensen in verband met de grotere begripdifferentialie die door kwantisering tot stand komt. We hebben er op gewezen dat men door kwantitatieve relaties aan te brengen niet alleen de beschikking krijgt over een fijnere klassificatie in de zin waarin ook wiskundigen over een fijnere verdeling spreken, maar dat er ook een gemetriseerde orderingsrelatie wordt aangebracht, waardoor men operaties kan voltrekken die op een louter kwalitatief stramien niet uitvoerbaar waren. Het gevolg hiervan is dat men niet alleen tot eenvoudigere en praktisch hanteerbaardere uitdrukkingen komt - men zou in dit verband bijv. aan de grafisch verwerkte resultaten van onderzoek kunnen denken - maar dat mede door de mogelijkheid om afgeleide grootheden in te voeren, in veel gevallen ook kwantitatieve inzichten verworven worden die in niet geringe mate verantwoordelijk zijn voor de explicatieve en predictieve kracht van een wetenschappelijke theorie. Door hun empirisch gemetriserd karakter zijn kwantitatieve uitspraken bovendien optimaal toegankelijk voor derden, zodat tenslotte ook aan de methodologische wensen van intersubjectieve duidelijkheid en experimentele verifikatie-mogelijkheid verder tegemoet gekomen wordt. Wat dit laatste betreft zal men echter ook hier niet tot het uiterste kunnen gaan als men bijv. bedenkt dat de ekonoom de kostprijs van een produkt enerzijds als continue grootheid zal willen opvatten om wiskundige bewerkingen als differentiatie en integratie uit te kunnen voeren, maar hij anderzijds de wiskundige niet zal willen volgen waar deze aan de continuïteit van zijn verzameling van getallen ook een dichte verdeling verbindt.

In dit overzicht is slechts de meest rudimentaire structuur aangegeven

volgens welke ons kwantitatief denken blijkt te verlopen, en zulks nog op zeer onvolledige wijze. We hebben daarbij gebruik gemaakt van de standaard-uiteenzetting met betrekking tot dit onderwerp door C. G. Hempel, gepubliceerd met als titel *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science*, Chicago, 1952. Voor een gedetailleerder inzicht is men aangewezen op een uitgebreidere analyse met betrekking tot een bepaald vakgebied en zal men ook een uitvoeriger beroep moeten doen op de wiskundige getallenleer.

5