NETWERKPLANNING

door Prof. Dr. Ir. H. W. van den Meerendonk

1. Inleiding

Omstreeks het jaar 1960 werden een aantal technieken ontwikkeld die betrekking hebben op de planning en beheersing van de uitvoering van grote projecten. Deze technieken staan bekend onder de namen P.E.R.T. en C.P.M., afkortingen van respectievelijk „Project Evaluation and Review Technique” en „Critical Path Method”. Later werden beide aangegeven met de verzamelnaam „Netwerkplanningstechniek”, naar het in deze techniek gebruikte netwerk. De bedoelde grote projecten kunnen zijn: het bouwen van een huis, een fabriek of een schip, maar ook het ontwikkelen van een computersysteem of het opzetten van een verkoopcampagne.

Een van de eerste vragen die meestal wordt gesteld wanneer men een groot project gaat uitvoeren is welke de datum van gereedkomen zal zijn. In het algemeen is die vraag niet zo eenvoudig te beantwoorden. Bij het bouwen van een fabriek speelt niet alleen de grootte van het gebouw een rol, maar ook het aantal etages waaruit het bestaat en verder ook of er speciale voorzieningen moeten worden getroffen.

De gedachten die aan de netwerkplanningstechniek ten grondslag liggen zijn de volgende:

- een groot project kan worden opgesplitst in een aantal duidelijk te definiëren karweien of activiteiten;
- tussen de karweien (ook wel aangeduid met het woord activiteiten) bestaat een onderlinge relatie ten aanzien van de volgorde, waarin deze activiteiten in de tijd moeten worden uitgevoerd;
- van iedere activiteit afzonderlijk kan, met behulp van arbeidstudie en tijdstudie, een redelijke schatting worden gemaakt van de tijdsduur die nodig is om de betreffende activiteit te voltooien;
- wanneer eenmaal aan een bepaalde activiteit is begonnen, wordt deze zonder enig uitstel afgemaakt;
- er wordt verondersteld dat er altijd voldoende mankracht en/of machinecapaciteit aanwezig is om ieder karwei uit te voeren;
- het tijdstip waarop aan de uitvoering van een karwei wordt begonnen kan, binnen de restricties ten aanzien van de volgorde van uitvoering, vrij worden gekozen.

2. Het relatiediagram

Het relatiediagram, ook wel netwerk genaamd, is een visuele voorstelling van de onderlinge samenhang tussen de karweien die moeten worden verricht om een project te voltooien. De activiteiten worden door een pijl voorgesteld (zie figuur 1). Een pijl wordt begrensd door knooppunten, die ook wel worden aangeduid als „mijlpalen”.

Figuur 1

De knooppunten worden genummerd en met cirkels in het netwerk aangegeven. De pijlen leggen de logische volgorde van de activiteiten vast. De lengte van een pijl geeft niet de duur van een activiteit aan. De pijlen worden geïdentificeerd door de nummers van de knooppunten waartussen zij liggen. Zo zijn er dan activiteit 1-2, activiteit 2-3, activiteit 2-5 enz. Om de activiteiten op een ondubbelzinnige wijze te kunnen vastleggen, is het noodzakelijk dat tussen twee mijlpalen slechts één activiteit voorkomt. Bij het opstellen van het relatiediagram moet daarmee rekening worden gehouden.

In het netwerk staat met behulp van pijlen en knooppunten aangegeven welke activiteiten voltooid moeten zijn voordat aan andere kan worden begonnen.

Zo kan in het project, dat door relatiediagram in figuur 1 wordt voorgesteld, niet met activiteit 2-3 worden begonnen voordat 1-2 gereed is gekomen. Men geeft dit soms wel aan met te zeggen dat aan 2-3 niet kan worden begonnen voordat mijlpaal 2 is bereikt. Mijlpaal 5 wordt echter pas bereikt wanneer zowel de activiteiten 2-5, 3-5 als 4-5 zijn beëindigd. Daarna kan men pas de activiteit 5-6 beginnen uit te voeren. Het gehele project is gereed bij het bereiken van mijlpaal 6.

Bij de nummering van de knooppunten of mijlpalen is het (zeker met het oog op computergebruik) aan te bevelen zó te nummeren, dat een knooppunt dat aan de „punt” van een pijl ligt, een hoger nummer heeft dan het knooppunt dat aan de „staart” van de pijl ligt. De knooppunten in figuur 1 zijn op deze wijze genummerd.

Bij het opstellen van een relatiediagram kan men soms moeilijkheden ondervinden wanneer twee of meer activiteiten parallel moeten worden uitgevoerd (zie figuur 2).

Figuur 2

De activiteiten tussen de knooppunten 1 en 2 zijn nu niet meer eenduidig bepaald. Deze moeilijkheid kan worden ondervangen door het invoeren van hulppijlen of „dummies” en extra knooppunten zoals in figuur 3.

Figuur 3

De twee extra knooppunten en de hulppijlen 3-4, 4-5 maken het mogelijk om de drie activiteiten die in het relatiediagram van figuur 2 tussen de knooppunten 1 en 2 lagen, eenduidig vast te leggen. Om duidelijk aan te geven dat een hulppijl slechts een denkbeeldige activiteit weergeeft, wordt deze meestal als een gestippelde pijl getekend. De tijdsduur van gereedkomen van deze denkbeeldige activiteiten wordt per definitie gelijk aan nul gesteld.

Soms moeten ook hulppijlen worden ingevoerd om de relatie tussen de verschillende activiteiten op de juiste wijze vast te leggen. Gesteld dat van een aantal activiteiten die wij voorlopig aangeven met a, b, c en d, bekend is dat aan activiteit c kan worden begonnen nadat a gereed is gekomen, en dat activiteit d pas kan starten wanneer zowel a als b klaar zijn. Wanneer deze relaties zouden worden voorgesteld als in figuur 4

Figuur 4

dan zou dat betekenen, dat zowel activiteit c als activiteit d moeten wachten op het gereedkomen van zowel a als b. Dit is dus niet een goede weergave van de relatie tussen deze activiteiten. De juiste relatie kan worden weergegeven door het invoeren van een hulppijl zoals in figuur 5.

Figuur 5

De activiteit c (3-5) kan hier beginnen na het gereedkomen van a (1-3) alleen. Activiteit d (4-6) moet echter wachten op b (2-4) en hulpactiviteit 3-4. Deze laatste moet weer wachten op het gereedkomen van a (1-3) en daar aan een denkbeeldige activiteit een tijdsduur van 0 wordt toegekend, komt het er op neer dat d pas kan beginnen na het gereedkomen van zowel a als b.

De wijze van nummeren kan eventuele foutief gestelde relaties op het spoor brengen. In figuur 6 zou de activiteit 4-2 bij een consequent doorgevoerde wijze van nummering, als zijnde een onmogelijke relatie, direct worden opgespoord.

Figuur 6

3. Het doorrekenen en analyseren van het relatiediagram

Stel dat de onderlinge relaties tussen de activiteiten, die moeten worden verricht om een project te voltooien, worden voorgesteld door figuur 7.

Figuur 7

De benodigde tijdseenheden voor de verschillende activiteiten zijn in deze figuur bij de pijlen aangegeven. Ook in de volgende tabel zijn zij vermeld.

Activiteit	Tijdsduur
1 - 2	8
1 - 3	7
2 - 3	3
2 - 4	20
2 - 5	9
3 - 4	15
3 - 5	7
4 - 5	4
4 - 6	8
5 - 6	2

Gevraagd wordt wanneer het project op zijn vroegst klaar kan zijn. Deze vraag kan worden beantwoord door te bepalen wanneer ieder knooppunt op zijn vroegst kan worden bereikt, d.w.z. wanneer alle activiteiten, waarvan de pijlen eindigen in een knooppunt, gereed zijn. Aan het project wordt op het tijdstip 0 begonnen. Knooppunt 2 kan op zijn vroegst worden bereikt op tijdstip 8, namelijk wanneer de activiteit 1-2 is voltooid. Knooppunt 3 wordt bereikt wanneer zowel activiteit 1-3 als activiteit 2-3 zijn beëindigd. De activiteit 2-3 kan pas beginnen na het bereiken van knooppunt 2, dus wanneer de activiteit 1-2 is afgelopen. Knooppunt 3 wordt dus bereikt op het tijdstip $8 + 3 = 11$, daar deze tijd langer is dan de duur van de activiteit 1-3, die 7 bedraagt. Knooppunt 4 wordt bereikt op het tijdstip $\max(8 + 20, 11 + 15) = 28$. In figuur 8 zijn in vierkanten de tijdstippen aangegeven waarop ieder knooppunt op zijn vroegst kan worden bereikt, als men met de uitvoering van het project op het tijdstip 0 begint.

Figuur 8

Op gelijke wijze als voor de knooppunten 2, 3 en 4 worden de vroegst bereikbare tijdstippen van de knooppunten 5 en 6 berekend. Knooppunt 6 geeft het gereedkomen van het gehele project weer. In dit voorbeeld kan het project niet eerder gereed komen dan 36 tijdseenheden na het begin.

Wij kunnen ons afvragen, wanneer een knooppunt op zijn laatst bereikt moet zijn, indien wij als eis stellen dat het gehele project zo snel mogelijk gereed moet komen. Knooppunt 6 moet dan worden bereikt op tijdstip 36 en knooppunt 5 op het tijdstip $36 - 2 = 34$. (De duur van activiteit 5-6 is gelijk aan 2). Knooppunt 4 zou wat betreft activiteit 4-5 bereikt kunnen worden op het tijdstip $34 - 4 = 30$. Echter mag dit vanwege activiteit 4-6, met een duur van 8 tijdseenheden, niet later worden dan het tijdstip $36 - 8 = 28$.

Wanneer wij knooppunt 3 beschouwen, zien wij dat dit op zijn laatst mag worden bereikt op het tijdstip $\min(28 - 15, 34 - 7) = 13$. Voor knooppunt 2 is dit $\min(28 - 20, 34 - 9, 13 - 3) = 8$ en voor knooppunt 1: $\min(8 - 8, 13 - 7) = 0$. In figuur 8 zijn in de cirkels bij de knooppunten de tijdstippen aangegeven waarop de betreffende knooppunten op zijn laatst mogen worden bereikt.

Aan de hand van de tijdstippen waarop de knooppunten op zijn vroegst bereikt kunnen worden resp. op zijn laatst bereikt moeten zijn, kunnen wij nagaan wat het vroegste tijdstip is, waarop een bepaalde activiteit kan zijn beëindigd en ook op welk tijdstip aan die activiteit persé moet worden begonnen om het project niet te laat te doen komen.

Zo kan bijvoorbeeld activiteit 1-3 op zijn vroegst beginnen op tijdstip 0 en daar de tijdsduur van deze activiteit gelijk is aan 7, kan deze activiteit pas op zijn vroegst klaarkomen op het tijdstip 7. Het laatst toelaatbare tijdstip van klaarkomen is echter 13 en derhalve mag aan 1-3 niet later worden begonnen dan op tijdstip 6. In de volgende tabel zijn voor iedere activiteit uit het voorbeeld deze verschillende tijdstippen aangegeven.

<i>Activiteit</i>	<i>vroegst mogelijk begin tijd- stip</i>	<i>laatst mogelijk begin tijd- stip</i>	<i>vroegst mogelijk tijdstip van ge- reedkomen</i>	<i>laatst mogelijk tijdstip van ge- reedkomen</i>	<i>totale speel- ruimte</i>
1 - 2	0	0	8	8	0
1 - 3	0	6	7	13	6
2 - 3	8	10	11	13	2
2 - 4	8	8	28	28	0
2 - 5	8	25	17	34	17
3 - 4	11	13	26	28	2
3 - 5	11	27	18	34	16
4 - 5	28	30	32	34	2
4 - 6	28	28	36	36	0
5 - 6	32	34	34	36	2

Uit het bovenstaande blijkt dat slechts enkele activiteiten bepalend zijn voor het tijdstip waarop het project is afgemaakt. Dit zijn de zogenaamde kritieke

activiteiten. Deze worden zo genoemd omdat iedere vertraging, die bij de uitvoering van zo'n activiteit optreedt, direct een vertraging in het voltooiën van het gehele project ten gevolge heeft. Dit zijn ook de activiteiten, die hierdoor worden gekenmerkt, dat het laatst toelaatbare begintijdstip van uitvoering gelijk is aan het vroegst mogelijke. In het voorbeeld zijn dit de activiteiten 1-2, 2-4, en 4-6.

In het relatiediagram treffen wij een ononderbroken keten aan van kritieke activiteiten van het begin van het diagram tot aan het eind. Deze keten wordt het kritieke pad genoemd. De benaming „Critical Path Method” is aan deze uitdrukking ontleend.

De activiteiten die niet op het kritieke pad liggen, hebben, wat hun uitvoering betreft, „speelruimte”. Dit wil zeggen, dat ofwel het begintijdstip van uitvoering van zo'n activiteit kan worden verschoven, dan wel dat vertraging niet persé tot te laat komen van het gehele project behoeft te leiden.

Het kennen van deze speelruimte voor iedere activiteit is van groot belang, zeer zeker wanneer men toch verplicht is rekening te houden met beperkte capaciteiten die ter beschikking staan voor het uitvoeren van de activiteiten.

Alhoewel er verschillende soorten van speelruimten kunnen worden gedefinieerd, noemen wij slechts de zogenaamde totale speelruimte. Onder deze totale speelruimte verstaan wij de voor een bepaalde activiteit ter beschikking staande tijd, verminderd met de duur van die activiteit.

4. Spreiding in de uitvoeringsduur van een activiteit

In het voorgaande werd verondersteld dat de duur van de uitvoering van een activiteit van te voren precies bekend zou zijn. In de werkelijkheid zal dit natuurlijk meestal niet zo zijn.

Ten aanzien van de tijdsduur worden nu voor iedere activiteit drie schattingen gevraagd, een optimistische tijdsduur a , een tijdsduur m die men als meest reële beschouwt en een pessimistische b . Bij de methode die bekend is geworden onder de naam P.E.R.T. (Project Evaluation and Review Technique) wordt verondersteld dat de kansdichtheidsfunctie van de activiteitsduur een zogenaamde beta-verdeling is. Bij deze soort van verdeling blijkt een redelijke benadering van de verwachte waarde x van de duur van de activiteit te zijn:

$$x = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Voor de spreiding s geldt bij benadering:

$$s = \frac{b - a}{6}.$$

Voor de te verwachten oplevertijd van het project rekent men dan met de verwachte waarden van de activiteitsduren. In de P.E.R.T.-techniek beschouwt men als spreiding van de tijd van gereedkomen van het totale project de wortel uit de som van de varianties (onder variantie verstaat men het kwadraat van de spreiding s^2) van de activiteiten die op het kritieke pad liggen. Als voorbeeld diene het in figuur 9 geschetste relatiediagram met de in de bijbehorende tabel aangegeven schattingen.

Figuur 9

Activiteit	optimistische tijdsduur <i>a</i>	reële tijdsduur <i>m</i>	pessimistische tijdsduur <i>b</i>	verwachte tijdsduur <i>x</i>	spreiding
1 - 2	3	5	7	5	2/3
1 - 3	1	2	3	2	1/3
2 - 3	1	4	7	4	1
2 - 4	1	2	6	1½	5/6
3 - 4	3	4	5	4	1/3

De mathematische verwachting van de oplevertijd van het project is in dit geval gelijk aan 13. Het kritieke pad wordt gevormd door de pijlen 1-2, 2-3 en 3-4. De variantie van de oplevertijd is gelijk aan $(2/3)^2 + 1^2 + (1/3)^2 = 1\ 5/9$. De spreiding is dan ongeveer gelijk aan: 1,24.

Men moet bij toepassing van de hierboven beschreven P.E.R.T.-techniek wel bedenken dat de berekende mathematische verwachting en spreiding van het tijdstip van gereedkomen van het project slechts benaderingen zijn.

5. Toepassing van netwerkplanning

Wat kan men nu eigenlijk verwachten wanneer men netwerkplanningstechnieken in de praktijk gaat toepassen? Om op deze vraag een antwoord te kunnen geven moeten wij nagaan op welke wijze deze technieken in het algemeen worden gehanteerd. Het project wordt eerst opgesplitst in op zichzelf staande deelprojecten of activiteiten. Vervolgens wordt vastgesteld in welke volgorde deze moeten worden uitgevoerd. Men doet dit, omdat in het algemeen de te verwachten tijdsduur van een op zichzelf staand karwei betrekkelijk nauwkeurig kan worden voorspeld. Uit deze tijdsbepalingen en de onderlinge samenhang van de afzonderlijke karweien kan een betere schatting van de totale projectduur worden gemaakt dan in het geval wanneer men geen rekening houdt met deze onderlinge samenhang.

Wanneer men bij een bepaald project tot de conclusie komt dat de gevon-

den totale projectduur te lang is, kan men op verschillende wijzen trachten deze te verkleinen. Men kan proberen de tijdsduur van de karweien op het kritieke pad te bekorten door meer mensen en machines in te zetten of door de dagelijkse arbeidstijd te verlengen. Soms kunnen de karweien op een andere wijze worden uitgevoerd, waardoor tijd kan worden gewonnen. Hierdoor zal misschien de onderlinge samenhang tussen de activiteiten veranderen. Het relatiediagram zal dan moeten worden aangepast. Met het nieuwe relatiediagram en de gewijzigde tijdsduren kan de nieuwe opleverdatum worden vastgesteld. Indien nodig moet bovenstaande procedure nogmaals worden herhaald. Het resultaat is een werkplan, waaruit werkverdelingen en taakstellingen kunnen worden afgeleid. Hetgeen hierboven is beschreven, kunnen wij beschouwen als de statische kant van netwerkplanning. Het dynamische ligt hierin, dat wanneer de uitvoering van het project vordert, men voortdurend nagaat hoe de karweien ten aanzien van de tijd worden uitgevoerd. Op geregelde tijden worden deze vorderingen verwerkt en opnieuw wordt nagegaan of de gestelde datum van gereedkomen kan worden aangehouden. Het zal dan vaak nodig blijken om weer te overwegen extra mensen en machines in te zetten of de zaak anders aan te pakken. Er volgt dan weer een nieuwe schatting van de opleverdatum, spelingen en het kritieke pad.

Samenvattend kan worden gezegd dat netwerkplanningstechnieken hulpmiddelen zijn die het volgende opleveren:

- een werkplan dat aangeeft op welke wijze een project moet worden uitgevoerd;
- tijdgegevens betrekking hebbend zowel op de afzonderlijke activiteiten als op het totale project;
- aanduiding van de karweien die bepalend zijn voor de opleverdatum.