LINEAIRE PROGRAMMERING, KOSTEN- EN KOSTPRIJSBEREKENING

door Prof. Dr. A. Bosman

1. Inleiding

De ontwikkeling van de bedrijfseconomie ondervindt de laatste twee decennia een grote invloed van veranderingen die buiten het vak zelf plaats vinden. Als zodanig kunnen worden genoemd: de toenemende belangstelling van de gedragswetenschappen, in het bijzonder de sociologie en de psychologie, voor het werkterrein van de bedrijfseconomie, de organisatie, en de opkomst van een aantal, niet-kenobject-gebonden, wetenschappen als het operationeel onderzoek, de cybernetica en de systeemtheorie. Naast de ontwikkeling in andere wetenschappen moet in dit verband ook worden genoemd de opkomst van de rekenautomaat. Ongetwijfeld hebben deze veranderingen invloed uitgeoefend op de ontwikkeling van de bedrijfseconomie en ze zullen dit in de komende jaren zeker ook blijven doen. Het min of meer hechte bouwwerk dat door Limperg en de aanhangers van zijn theorie werd opgebouwd, vertoont op zijn minst tekenen van desintegratie. Bij velen komt de bedrijfseconomie op dit moment over als een verzameling van hypothesen. Voor zover deze niet zijn geverifiëerd en dat geldt voor vele, beschouwt de niet wetenschappelijk geschoolde waarnemer ze als kreten. We kunnen in dit artikel niet ingaan op de oorzaken die tot deze situatie hebben geleid, noch veel aandacht besteden aan mogelijke remedies.[1]) We zullen ons beperken tot een bespreking van één van de gevolgen van de genoemde veranderingen en daarbij aangeven hoe deze in de bedrijfseconomie kan worden ingepast. Door deze inpassing krijgt de theorie meer inhoud in die zin, dat het empirisch gehalte ervan wordt verhoogd, terwijl tevens een toepassingsmogelijkheid voor de rekenautomaat wordt geschapen.

De bedrijfseconomie bestudeert de beslissingen in organisaties die betrekking hebben op het beschikken over schaarse, alternatief, aanwendbare middelen. De door Limperg c.s. opgebouwde theorie beperkt zich daarbij voornamelijk tot de beslissingen die genomen worden in de top van de leidinggevende structuur. Het door ons zojuist bedoelde gevolg is dat in de bedrijfseconomie meer en meer aandacht wordt besteed aan de beslissingen die in de lagere leidinggevende structuur van de organisatie worden genomen. Een van de redenen daarvoor is het feit dat we nu beschikken over technieken waarmee het mogelijk is deze beslissingen te programmeren.[2]) Het gevolg hiervan is weer dat we in staat zijn een deel van de informele organisatie te formaliseren. De vraag of dat wel of niet moet gebeuren, zullen we in dit artikel niet beantwoorden. Alvorens die vraag kan worden beantwoord, zal, naar onze mening, eerst moeten worden aangegeven hoe de relaties moeten worden

---

[1]) Voor een bespreking van die oorzaken en de gevolgen voor de bedrijfseconomie zie A. Bosman: „Het handelen in de economie, I t/m IV," *Maandblad voor Bedrijfsadministratie en -Organisatie*, jrg. 76 (1972), nrs 905, 908 en 909, jrg. 77 (1973), nr. 910.

[2]) Voor het begrip programmeerbaar, zie H. A. Simon: *The New Science of Management Decision*, New York 1960.

gelegd tussen de beslissingsregels in de formele structuur en de programmeerbare in de informele structuur. Het leggen van die relaties heeft gevolgen voor de wijze waarop we de regels in de formele structuur definiëren, althans men moet ervan uitgaan dat de regels in de formele structuur de mogelijkheid moeten bezitten om het leggen van die relaties mogelijk te maken. We zullen in paragraaf 2 nader ingaan op de vraag welke veranderingen bij de kosten- en kostprijsberekening ontstaan, indien we relaties willen aanbrengen met de beslissingen in de informele structuur. In paragraaf 3 zullen we aantonen dat het m.b.v. de techniek der lineaire programmering (l.p.) mogelijk is deze veranderingen te bewerkstelligen. In paragraaf 4 zullen we de gevolgen van de toepassing van l.p. voor de berekening van kosten en kostprijs behandelen.

2. De sluier van de aggregatie - het begrip normaal

Indien we de programmeerbare beslissingen uit de informele organisatie in de bedrijfseconomie gaan bestuderen, gaan we ons bezig houden met beslissingen die voornamelijk betrekking hebben op in realia gedefiniëerde grootheden. Immers het gaat om beslissingen t.a.v. de grootte van voorraden in hoeveelheden, de opeenvolging van activiteiten over produktiefactoren, de grootte van het overwerk in uren etc. Op dit punt verschillen deze beslissingen van die, welke in de bedrijfseconomie gebruikelijk worden bestudeerd. Deze hebben voornamelijk betrekking op in geld gedefiniëerde grootheden. Willen we nu de in de inleiding bedoelde relaties leggen, dan zullen we derhalve zeker het probleem van de omschakeling van in realia gedefiniëerde naar in geld gedefiniëerde grootheden ontmoeten. Dit is in de economie een bekend probleem, dat veelal d.m.v. aggregatie wordt opgelost. Aggregatie betekent het reduceren van een verzameling gegevens tot één of enkele. Zo kan men een reeks getallen door optellen in één getal, de som, samenvatten. Optellen is dan ook één van de meest toegepaste vormen van aggregatie in de economie. Door aggregatie gaat ongetwijfeld informatie verloren, omgekeerd echter zijn we ook in staat m.b.v. aggregatie nieuwe informatie te verkrijgen.[3]) In de kosten- en kostprijsberekening in de bedrijfseconomie heeft men het probleem van de vertaling van in realia gedefiniëerde naar in geld gedefiniëerde grootheden niet opgelost d.m.v. aggregatie, maar door gebruik te maken van een zgn. ideaalconstructie. Bij de ideaalconstructie wordt het beeld van de werkelijkheid niet gevormd door van metingen van grootheden uit die werkelijkheid zelf uit te gaan, maar door die grootheden te definiëren veelal aan de hand van een ideale constructie. In de bedrijfseconomie is het vooral het begrip normaal dat dienst doet voor het construeren van deze ideaalbeelden. Zo worden de voor de kostprijsberekening relevante kosten gevonden door uit te gaan van de begrippen normale bedrijfsdrukte en meest geëigende produktiemethode. Het loslaten van de aggregatie betekent in de kostprijsterminologie dat men werkt met standaarden die niet zijn bepaald

[3]) Bekende voorbeelden daarvan geeft de statistische analyse.

op basis van in het verleden opgeofferde hoeveelheden produktiefactoren.[4]) Dat betekent dat men in de bedrijfseconomie de parameters van de produktiefunkties wil bepalen d.m.v. een planningprocedure. Immers voor het geven van een inhoud aan een kostenfunktie zal men de parameters van de achterliggende produktiefunkties moeten kennen. We kunnen aannemen dat deze door de techniek worden bepaald en d.m.v. een analyse van de organisatie kunnen worden vastgesteld. De planningprocedure is dan noodzakelijk om aan te geven op welke wijze de produktiefunkties kunnen worden geaggregeerd tot kostenfunkties. Aan de inhoud van deze planningprocedures is in de bedrijfseconomie in het kader van de kostenberekening bijzonder weinig aandacht besteed. Alle kostprijsberekeningsmethoden gaan uit van een gegeven kostenfunktie. Afgezien van enkele beschouwingen over een mogelijke toepassing van de isoquantenanalyse ontbreekt in de standaardleerboeken in de bedrijfseconomie elke bespreking van methoden voor de bepaling van de kostenfunktie. Met andere woorden het begrip meest geëigende produktiemethode wordt wel gedefinieerd c.q. genoemd, maar de wijze waarop het van een inhoud zou moeten worden voorzien wordt niet besproken.[5])

We hebben in de inleiding gesteld dat er relaties moeten worden gelegd tussen de programmeerbare beslissingen in de informele organisatie en de procedures voor het nemen van beslissingen in de formele organisatie. Spitsen we deze vraagstelling toe op de kosten- en kostprijsberekening dan zal een antwoord moeten worden gegeven op de vraag welke beslissingen m.b.v. kosten en kostprijzen worden genomen. In de bedrijfseconomie worden drie gebieden onderscheiden waarbij kosten en kostprijs voor het nemen van beslissingen kunnen worden gehanteerd.

Deze drie gebieden zijn:

a. de bepaling van de verkoopprijs,
b. de produktieplanning,
c. de controle op de uitvoering.

Voor de beslissingen die in deze drie gebieden moeten worden genomen kan men niet volstaan met de informatie die de in de bedrijfseconomie gebruikelijke kosten- en kostprijsberekening ter beschikking stelt. We zullen dit nader aantonen voor het onderdeel b.[6])

In de produktieplanning gaat het in eerste instantie en vooral om het nemen van beslissingen die betrekking hebben op in realia gespecificeerde variabelen en op de specificatie van de uitvoering. We denken hier aan beslissingen t.a.v. de ordening van de uitvoering van activiteiten en de tijdsbepaling daarvan. Deze detailproduktieplanning legt als het ware, rekening houdende

[4]) Ter voorkoming van misverstanden wijzen we erop dat ook in het geval van de ideaalconstructie kosten worden gevormd door de som van hoeveelheden opgeofferde produktiefactoren per periode of order maal hun respectieve prijzen. Uiteraard vindt er in dat geval ook aggregatie plaats. De aggregatie is nu echter hulpmiddel voor het rekenen en geen uitgangspunt van de redenering.

[5]) Het begrip meest geëigende produktiemethode wordt gehanteerd door J. L. Mey: *Leerboek der bedrijfseconomie*, dl. I, Den Haag 1960; anderen (bijv. Van der Schroeff) gebruiken in dit verband de term gunstige, optimale of doelmatige kwantitatieve verhoudingen.

[6]) Voor een bespreking van de redenen waarom dit voor de andere twee gebieden niet kan, wordt de lezer verwezen naar A. Bosman: „Voorwaarden voor het gebruik van de kostprijs bij het nemen van beslissingen", *Marketing, handboek voor commerciële beleidsvraagstukken*, red. B. G. Klein Wassink en H. J. Kuhlmeijer, Deventer 1969.

met een aantal randvoorwaarden, de stap voor stap uitvoering van het produktieproces vast in een plan. Voor ons vooral van belang is de vraag wie en hoe de randvoorwaarden noodzakelijk voor de opstelling van het detailplan worden gespecificeerd. Deze randvoorwaarden worden, voor zover ze geen exogene variabelen zijn, bepaald in het globale plan. Recente onderzoekingen op het gebied van de produktieplanning hebben drie belangrijke zaken aangetoond.[7])

a. Alhoewel het detail- en het globale plan als het ware twee zijden van dezelfde medaille zijn, kunnen ze niet simultaan worden opgesteld.

b. Gegeven de noodzaak tot deze kunstmatige scheiding en de sterke samenhang die er bestaat tussen de variabelen in beide plannen is het onjuist om te vooronderstellen, zoals meestal in de literatuur gebeurt, dat het globale plan kan worden opgesteld los van het detailplan.

c. Bij de opstelling van het detailplan kan geen optimale oplossing worden gevonden.

Gezien de sterke samenhang tussen globaal- en detailplan betekent dit dat aan de begrippen normale bedrijfsdrukte en meest kwantitatieve verhoudingen, die in de planningprocedure een inhoud krijgen, geen zodanige betekenis kan worden toegekend dat ze een kostprijs zouden opleveren in de vorm van een minimum minimorum.[8])

Dit betekent dat *de* basis voor het construeren van ideaalbeelden komt te vervallen. De vraag rijst of dat ook betekent dat we voor de berekening van kosten en kostprijzen moeten terugvallen op de normale aggregatiemethoden, d.w.z. het bepalen van standaards op basis van gemiddelden? We menen de vraag ontkennend te moeten beantwoorden. Wel zijn we van mening dat het idee van de ideaalconstructie moet worden losgelaten en dat het moet worden vervangen door een constructie waarbij het mogelijk is om zowel de wijze waarop het beeld van de werkelijkheid wordt gevormd en geanalyseerd als de kwaliteit van het beeld zelf te toetsen. We zullen in dit artikel alleen aan het eerste punt aandacht besteden en in de volgende paragraaf één van de methoden voor de constructie en analyse van het beeld bespreken. We gaan daarbij uit van de volgende uitgangspunten, die voor een belangrijk deel de keuze van de wijze van benadering bepalen.

We vooronderstellen dat de variabelen in het detailplan in realia zijn gedefiniëerd. Een gevolg van dit feit, in samenhang met de zojuist genoemde drie zaken, is:

1 dat het keuzeprobleem bij de opstelling van het detailplan niet wordt opgelost d.m.v. een waardefunktie, maar door het hanteren van bepaalde richtlijnen. Door middel van de relaties tussen de procedures voor het opstellen van het globale- en het detailplan moet worden aangegeven welke richt-

---

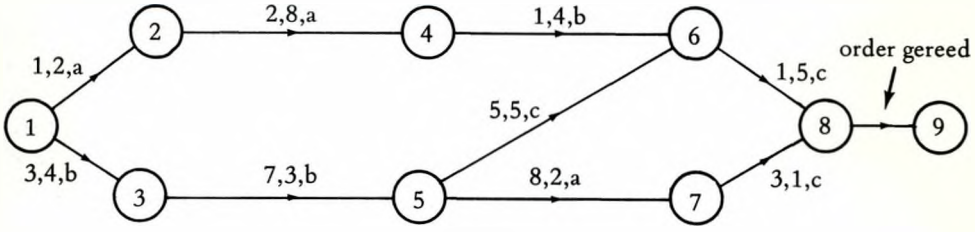
[7]) In het kader van dit artikel kunnen we het bewijs voor deze stellingen niet geven. De lezer wordt daarvoor verwezen naar A. Bosman: *Systemen, planning, netwerken,* Leiden 1969, maar vooral naar J. H. Mize, C. R. White en J. H. Brooks: *Operations Planning and Control*, Englewood Cliffs 1971, die op deze punten uitvoerig ingaan.

[8]) Op dit punt bestaat er ook in de bestaande bedrijfseconomische literatuur verschil van mening, J. L. Mey, t.a.p., gaat ervan uit dat de kostprijs een minimum minimorum is. Van der Schroeff gaat uit van een minimum, maar gezien de randvoorwaarden die hij hanteert, zal dit veelal een locaal minimum zijn.

lijnen onder welke omstandigheden het beste funktioneren. Daarvoor zal het noodzakelijk zijn dat we bij de procedures voor de opstelling van het globale plan wel kunnen beschikken over een waardefunktie;
2 dat de relaties tussen globaal- en detailplan zijn gespecificeerd in realia. Is dat niet het geval dan zal het probleem van de sluier van de aggregatie ontstaan, waardoor een goede afstemming niet kan worden gevonden, maar het tevens niet mogelijk is via een tweetrapsproces bij de opstelling van het detailplan gebruik te maken van de waardefunktie bij het globale plan;
3 dat de twee trappen in de planning en het ontbreken van een waardefunktie bij de opstelling van het detailplan het wenselijk maken dat de resultaten van het detailplan kunnen worden vertaald in geaggregeerde grootheden.[9]) Bij de kosten- en kostprijsberekening zullen dit veelal in geld gedefiniëerde grootheden zijn. We zullen in paragraaf 4 laten zien hoe dit, gegeven het voorstel in paragraaf 3, kan worden uitgevoerd.

3. Het globale plan, lineaire programmering

Het grote verschil tussen een globaal plan, gespecificeerd voor het oplossen met l.p., en een detailplan is dat in het globale plan een aggregatie plaats vindt van een groot aantal taken, die in het detailplan afzonderlijk zijn gespecificeerd.[10]) Gezien de specificatie vereist voor l.p. zal die aggregatie veelal plaats vinden naar de produktiefactoren. Het volgende voorbeeld licht dit toe.



Figuur 1

In figuur 1 is een netwerkspecificatie gegeven van de produktie van een bepaald artikel. Bij elke activiteit (pijl) zijn twee getallen en één letter vermeld. De letters geven groepen produktiefactoren weer, bestaande uit een

---

[9]) Naar onze mening is dit niet alleen een zaak van wenselijkheid, maar een noodzakelijkheid. Aan dit punt wordt merkwaardigerwijs in de literatuur, en met name in die over de zgn. management informatiesystemen, weinig of geen aandacht besteed. Dit is daarom merkwaardig omdat juist in die literatuur veel aandacht wordt geschonken aan de samenhang tussen beslissingsprocedures. Juist voor een goede waardering van de procedures bij de detailplanning is het noodzakelijk dat men de resultaten ervan in een groot verband, en dat zijn de totale kosten, kan plaatsen. Uitkomsten als reduktie van wachttijden, verkorten van wachtrijen, het halen van de leveringsdatum zeggen, zonder bijbehorende vertaling naar de kosten, weinig of niets. Een auteur die ook met nadruk op dit punt wijst is Boyd, zie D. F. Boyd: „Enterprise Models: A New Management Technique", *Management of production*, ed. M. K. Starr, Penguin modern management Reading 1970 en D. F. Boyd en H. J. Krasnow: „Economic Evaluation of Management Information Systems", *Management information systems*, ed. T. W. McRae, Penguin modern management Readings 1971.

[10]) In de terminologie van de netwerkplanningtechnieken noemen we die taken activiteiten.

combinatie van twee, terwijl de cijfers aangeven hoe lang de twee produktiefactoren per groep voor de uitvoering van de activiteit worden gebruikt. We nemen aan dat het tijdbeslag in uren is gedefinieerd. Aggregatie zou volgens tabel I, kunnen plaatsvinden.

Tabel I

machinegroep[11])	*a*		*b*		*c*	
			produktiefactor (beslag in uren)			
activiteiten	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
1,2	1	2				
1,3			3	4		
2,4	2	8				
3,5			7	3		
4,6			1	4		
5,6					5	5
5,7	8	2				
6,8					1	5
7,8					3	1
totaal	11	12	11	11	9	11

We kunnen nu m.b.v. de totalen in tabel I een specificatie voor een l.p. opstelling maken. Bij de opstelling van die specificatie moeten we ons realiseren welk doel we er mee willen realiseren. Dat doel is een zo juist mogelijke toewijzing van de beschikbare produktiefactoren aan de verschillende eindprodukten. Een kenmerk van de complexe situatie in produktieprocessen is dat het grootste deel van de produktiefactoren niet rechtstreeks is gekoppeld aan de fabricage van een eindprodukt, maar dat die koppeling indirect plaats vindt via de fabricage van onderdelen of halffabrikaten. We zullen derhalve twee soorten relaties moeten onderscheiden, nl. de relaties tussen de fabricage van onderdelen, halffabrikaten, eindprodukten en de beschikbare produktiefactoren, we zullen dat de *produktiefactorenrelaties* noemen, en de relaties tussen onderdelen en halffabrikaten enerzijds en de eindprodukten anderzijds, we noemen dat de *produktspecificatierelaties.* In ons voorbeeld geven we die twee soorten relaties als volgt weer:

produktiefactorenrelaties:

$$
\begin{aligned}
11\,x_a &\leqslant ba_1\\
12\,x_a &\leqslant ba_2\\
11\,x_b &\leqslant bb_1\\
11\,x_b &\leqslant bb_2\\
9\,x_c &\leqslant bc_1\\
11\,x_c &\leqslant bc_2
\end{aligned}
$$

produktspecificatierelaties:

x_a	x_b	x_c	y
1			-1 = 0
	1		-1 = 0
		1	-1 = 0

[11]) De term machinegroep wordt gebruikt i.p.v. de langere term van produktiefactoren. Ter voorkoming van misverstand wijzen we erop dat het mogelijk is om elke combinatie van produktiefactoren op deze wijze weer te geven.

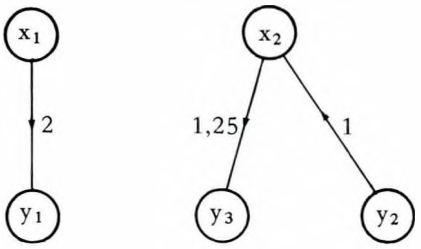
waarin:
x_a = de produktiesnelheid van machinegroep a,
x_b = de produktiesnelheid van machinegroep b,
x_c = de produktiesnelheid van machinegroep c,
(de produktiesnelheden van de drie machinegroepen zijn gedefiniëerd in een prestatieeenheid van de betrokken machinegroepen);
ba_1 = de hoeveelheid eenheden beschikbaar van produktiefactor nr. 1 van machinegroep a,
bb_2 = de hoeveelheid eenheden beschikbaar van produktiefactor nr. 2 van machinegroep b,
bc_1 = de hoeveelheid eenheden beschikbaar van produktiefactor nr. 1 van machinegroep c,
idem voor ba_2, bb_1 en bc_2,
y = de produktiesnelheid van het eindprodukt, waarvan in figuur 1 de produktie-technische specificatie is gegeven in de vorm van activiteit 8,9. Uit de bovenstaande produktspecificatie blijkt dat van alle in figuur 1 vermelde activiteiten er één moet worden geleverd voor de fabricage van één eindprodukt.

Uit de gegeven specificaties blijkt het volgende belangrijke verschil tussen detail- en globaal plan. In het globale plan wordt geen specificatie van de ordening der activiteiten gegeven en het is derhalve niet mogelijk de tijdbepaling vast te stellen. Dat betekent ondermeer dat men bij de berekening m.b.v. l.p. van het globale plan niet mag uitgaan van de maximale hoeveelheden van de beschikbare produktiefactoren gedurende de planperiode. Zou men dat wel doen dan zou men geen rekening houden met de ordeningsrelatie en met de uit het „naleven" van die relaties resulterende wachttijden.[12]) In het besproken voorbeeld is de produktspecificatie van eenvoudige aard.

In het volgende voorbeeld is die produktspecificatie complexer; zie figuur 2. Bovendien is in dit voorbeeld voor twee machinegroepen aangenomen dat er een keuzemogelijkheid bestaat uit twee mogelijke wijzen van produceren.[13]) We gebruiken de symbolen in dezelfde betekenis als in het reeds behandelde voorbeeld, d.w.z. dat de symbolen x_i prestatieeenheden weergeven die betrekking hebben op de fabricage van onderdelen en halffabrikaten ($i = 1, 2, \ldots, n$). De symbolen y_g worden gebruikt voor de produktiesnelheden van eindprodukten ($g = 1, 2, \ldots, m$).

[12]) Om vast te stellen met hoeveel procent de beschikbare hoeveelheden der produktiefactoren moeten worden verlaagd om een voor het opstellen van het detailplan bruikbare oplossing te vinden, zal vooral moeten worden gekeken naar de complexiteit van de produktspecificatie in het netwerk. Deze complexiteit kan o.a. worden gemeten door de verhouding tussen knooppunten en pijlen in het netwerk, zie A. Bosman: *Systemen, planning, netwerk*, Leiden 1969, hfst. 5.

[13]) Het aantal van twee werd gekozen om het voorbeeld hanteerbaar te houden. Het aantal kan in praktische toepassingen bijna onbeperkt worden vergroot.



Figuur 2

In het voorbeeld in figuur 2 is y_2 een combinatie van de produktiesnelheden van een halffabrikaat en een eindprodukt. Het produkt kan nl. als eindprodukt worden verkocht of als halffabrikaat verder worden verwerkt tot het eindprodukt nr. 3. We gaan er in dit voorbeeld van uit, zie tabel II, dat er voor de produktie vier produktiefactoren worden gebruikt, waarvan er bij één, de laatste in tabel II, uitbreiding van de capaciteit mogelijk is, bijv. door overwerk. In al die gevallen waarin extra capaciteit kan worden geschapen tegen hogere kosten en/of bepaalde produkten voor meerdere doeleinden kunnen worden gebruikt, moeten al deze mogelijkheden afzonderlijk worden onderscheiden. Beide situaties doen zich voor bij y_2, zodat we vier varianten krijgen, y_{211} = halffabrikaat zonder overwerk, y_{212} = halffabrikaat met overwerk, y_{221} = eindprodukt zonder overwerk, y_{222} = eindprodukt met overwerk. Hetzelfde geldt voor de keuzemogelijkheid voor het op verschillende wijze produceren, zoals die is opgenomen bij x_1. In tabel II zijn tevens zgn. assortimentsbeperkingen opgenomen. Deze zijn noodzakelijk om te voorkomen dat in de optimale oplossing van het l.p.-probleem bepaalde artikelen niet voorkomen. In de waardefunktie zijn per artikel opgenomen de brutomarge, d.w.z. de verkoopprijs minus de directe variabele kosten in het geval van de eindprodukten, en de directe variabele kosten in het geval van de onderdelen of halffabrikaten.

Tabel II

	x_{11}	x_{12}	x_2	y_1	y_{211}	y_{212}	y_{221}	y_{222}	y_3	*beschikbare hoeveelheden produktiefactoren*
produktiefactoren-	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leqslant 2000$
relaties	0	1,2	0	0	0	0	0	0	0	$\leqslant 1000$
	0	0	0	0	1	1,1	1	1,1	0	$\leqslant 2500$
	35	36	20	0	48,5	0	48,5	0	0	$\leqslant 250.000$
	0	0	0	0	0	50	0	50	0	$\leqslant 50.000$
produktspecifica-	1	1	0	-2	0	0	0	0	0	$=0$
tierelaties	0	0	1	0	0	0	0	0	1,25	$=0$
	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	$=0$
assortimentsbeper-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\geqslant 500$
kingen	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\geqslant 250$
waardefunktie	-40	-42	-10	850	-25	-50	900	875	1600	maximaal

m a b blz. 188

Met behulp van de wiskunde kan men een dergelijk probleem als volgt beschrijven:

$$(1) \qquad \begin{matrix} M & \left|\begin{matrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{matrix}\right| & \leqslant \bar{b} \\ (EE\text{-}F) & \left|\begin{matrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{matrix}\right| & = \bar{o} \\ & \bar{y} & \geqslant \bar{n} \end{matrix}$$

$$z = -\bar{p}_x\bar{x} + \bar{p}_y\bar{y} \rightarrow \text{maximaal}$$

waarin: M = een matrix met technische coëfficiënten voor de beschrijving van de produktiefactorenrelaties,
$\bar{x}$ = een vector met de produktiesnelheden van de halffabrikaten en onderdelen,
$\bar{y}$ = een vector met de produktiesnelheden van eindprodukten,
(EE-F) = een matrix met een beschrijving van de produktspecificatierelaties,
$\bar{b}$ = een vector met de beschikbare hoeveelheden der produktiefactoren,
$\bar{o}$ = een vector met nullen,
$\bar{n}$ = een vector met assortimentseisen,
$\bar{p}_x$ = een vector met directe variabele kosten,
$\bar{p}_y$ = een vector met brutomarges.

De optimale oplossing voor het onderhavige probleem m.b.v. l.p. is:

$x_{11} = 2000$	$y_1 = 1417$
$x_{12} = 833$	$y_{211} = 2078$
$x_2 = 2462$	$y_{222} = 384$
$z = 4.144.270$	$y_3 = 1969$

De niet opgenomen variabelen hebben de waarde nul, de opgenomen getallen zijn op de normale wijze afgerond op gehele getallen.[14])

4. Kosten- en kostprijsberekening

De in paragraaf 3 besproken toepassing van l.p. loopt vooruit op het vinden van een aansluiting van het gebruik van l.p. voor het berekenen van kosten en kostprijzen. Dat vooruitlopen komt tot uitdrukking in het opnemen van afzonderlijke vectoren voor de produktie van onderdelen en halffabrikaten

14) Het toepassen van de normale afrondingsprocedure is in het geval van l.p. in principe onjuist, omdat het mogelijk is dat men niet meer voldoet aan de beperkingen van de produktiefactorenrelaties. Aangezien afronden naar beneden doorgaans geen optimale oplossing geeft, is dit probleem alleen oplosbaar indien men gebruik maakt van de zgn. gehele getallen en/of gemengde programmering. In het eerste geval moeten alle variabelen gehele getalswaarden aannemen, in het tweede geval geldt deze eis alleen voor een beperkt aantal van de variabelen.

en het daardoor noodzakelijk worden van het opnemen van de produktspecificatierelaties. Hadden we dit niet gedaan, dan had de l.p. formulering van het probleem er uit gezien als in tabel III.

Tabel III

	y_{12}	y_{12}	y_{21}	y_{22}	y_{31}	y_{32}	*beschikbare hoeveelheden*
produktiefactoren-	2	0	0	0	0	0	$\leqslant 2000$
relaties	0	2,4	0	0	0	0	$\leqslant 1000$
	0	0	1	1,1	1,25	1,375	$\leqslant 2500$
	70	72	48,5	0	85,625	0	$\leqslant 250.000$
	0	0	0	50	0	87,5	$\leqslant 50.000$
assortimentsbeper-	1	1	0	0	0	0	$\leqslant 500$
king	0	0	0	0	1	1	$\leqslant 250$
waardefunktie	770	766	900	875	1556,25	1525	maximaal

Wiskundig is de formulering dan, zie (1) en de daar gebruikte symbolen:

$$(2) \qquad M\bar{y} \leqslant \bar{b}$$

$$\bar{y} \geqslant \bar{n}$$

$$z = \bar{p}_y\bar{y} \rightarrow \text{maximaal}$$

Het voordeel van deze specificatie is dat ze minder groot van omvang is. Het nadeel is, dat het probleem minder overzichtelijk wordt weergegeven en er geen directe aansluiting wordt gevonden met de specificatie van het detailplan en die noodzakelijk voor de kosten- en kostprijsberekening. Om dit laatste te bereiken moet er aan twee voorwaarden worden voldaan.

1 De kosten- en kostprijsberekening moet aansluiten op de in realia gedefinieerde grootheden van het globale plan (zie ook de punten 1 t/m 3 aan het einde van paragraaf 2).

2 Het globale plan moet aansluiten bij het in kostprijsberekening gebruikelijke onderscheid tussen hulp- en hoofdkostenplaatsen. Zoals we in paragraaf 3 hebben aangetoond, is dat technisch eenvoudig uitvoerbaar. Bovendien is deze aansluiting zeker ook gewenst om een relatie te kunnen leggen tussen detailplan en globaal plan. Op dat punt ontstaan derhalve geen strijdigheden.

Wat betreft de eerste voorwaarde moeten we ons realiseren en dat ook accepteren dat het globale plan een inhoud geeft aan de begrippen normale bedrijfsdrukte en meest gunstige kwantitatieve verhoudingen. Voor zover het de normale bedrijfsdrukte betreft is dat de verzameling van produktiesnelheden in de optimale oplossing. Voor zover het de meest gunstige kwantitatieve verhoudingen betreft is het de verzameling van vectoren van technische coëfficienten in de optimale oplossing. Hiervan uitgaande kan men op eenvoudige wijze, zoals we aan de hand van het voorbeeld zullen aantonen, de kosten- en kostprijsberekeningsmethode volgens de in de bedrijfseconomie bekende produktiecentramethode uitvoeren.

Het berekenen van de kostprijs verloopt bij de produktiecentramethode in twee stappen, nl. het opstellen van de kostenverdeelstaat en de kosten-

verrekenstaat. De voor de uitvoering van deze twee stappen noodzakelijke gegevens en relaties zijn in ons geval opgenomen in resp. de produktiefactorenrelaties en de produktspecificatierelaties. Voor het invullen van de kostenverdeelstaat moet de matrix M op twee punten worden gewijzigd.

a. Er zullen in vele gevallen rijen, d.w.z. produktiefactorenrelaties moeten worden toegevoegd, omdat het voor het oplossen met l.p. van een probleem geen zin heeft produktiefactoren, bijv. het merendeel van de diensten van derden, op te nemen waarvan de beschikbare hoeveelheden niet aan een bovengrens zijn gebonden. We hebben dit probleem in ons voorbeeld „omzeild" door de directe variabele kosten niet verder onder te verdelen naar produktiefactoren, maar als één rij van coëfficiënten op te nemen (zie de laatste rij in tabel IV). In feite klopt de dimensie van deze rij niet met die van de andere rijen, die in realia zijn gedefiniëerd. Door in de prijzenvector $\bar{p}_a$ het betrokken element de waarde één te geven wordt dit dimensieprobleem bij de berekening van de kostprijs opgeheven.

b. Als er een keuzeprobleem bestaat en er wordt meer dan één vector gekozen, dan zullen deze moeten worden samengevoegd tot één vector, omdat we in de kostprijsberekening, overigens op basis van afspraak, slechts één kostenplaats definiëren. Zo zal in ons voorbeeld, zie tabel II, één vector van technische coëfficiënten voor $\bar{y}_2$ worden vastgesteld en wel als volgt:

$$(3) \quad \bar{y}_2 = \bar{y}_{211} \cdot \frac{2078}{2462} + \bar{y}_{212} \cdot \frac{384}{2462}$$

Op deze wijze krijgen we een nieuwe matrix A van technische coëfficiënten die in tabel IV is weergegeven.

Tabel IV

	hulpkostenplaatsen			*hoofdkostenplaatsen*	
	$1(x_1)$	$2(x_2)$	$3(y_2)$	$I(y_1)$	$II(y_3)$
	0,71	0	0	0	0
de matrix A	0,35	0	0	0	0
	0	0	0	1,02	0
	35,3	20	0	40,9	0
	0	0	0	7,8	0
	40,59	10	25	28,88	50

We geven de normale bedrijfsdrukte weer door een vector d. In ons geval is:

$$(4) \quad d = 2833, 2462, 2462, 1417, 1969.$$

De elementen in de vector komen wat volgorde betreft uiteraard overeen met die in de matrix A.[15]) Gegeven A en d kan de kostenverdeelstaat als volgt worden berekend.[16])

---

[15]) Zie voor een beschouwing over de regels van de matrixoperaties D. W. Feenstra: „Matrix-algebra als hulpmiddel bij de kostenverbijzondering", dit nummer.

[16]) We maken geen onderscheid tussen kolom- en rijvectoren. De lezer kan voor zich zelf wel nagaan of er in een bepaalde situatie sprake is van een kolom- of een rijvector.

(5) $A.D = B$
(6) $Pa.B = K_1$
(7) $A.\bar{d} = \bar{a}$
(8) $\bar{a}.Pa = \bar{k}_s$

waarin:
D = diagonale matrix met produktiesnelheden,[17])
B = matrix met aanwendingssnelheden der produktiefactoren per kostenplaats,
$\bar{a}$ = vector met het totale beslag op de produktiefactor,
P_a = diagonale matrix met de prijzen per eenheid van de produktiefactoren,
K_1 = de kostenverdeelstaat,
$\bar{k}_s$ = de kostensoorten.

De kostenverrekenstaat wordt evenals de kostenverdeelstaat berekend door uit te gaan van technische coëfficiënten. Deze coëfficiënten zijn terug te vinden in de produktspecificatierelaties. De „levering aan" zijn opgenomen in een matrix F. Aangezien deze „levering aan" altijd zijn bepaald t.a.v. een eenheid van de leverende kostenplaats, (zie tabel II), kan men de relaties voor het berekenen van de kostenverrekenstaat als volgt schrijven:

(9) (E-F)

waarin: E = een eenheidsmatrix.
In ons voorbeeld zou de (E-F) matrix er als volgt uitzien:

(10)
1	0	0	-2	0
0	1	0	0	-1,25
0	-1	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Het kenmerk van een hoofdkostenplaats is dat de rij in de (E-F) matrix slechts één element, nl. één, op de hoofddiagonaal bevat. De eenheidsmatrix kan worden beschouwd als de wiskundige variant van het begrip kostendrager. De kostenverrekenstaat wordt dan gevonden door:

(11) (E-F). D = C

waarin C de leveringen in fysieke hoeveelheden weergeeft. De leveringen in C kunnen niet direct in geld worden gewaardeerd, omdat we daarvoor de tarie-

17) Een diagonale matrix is een matrix met alleen op de hoofddiagonaal waarden ongelijk nul. Deze matrices worden gebruikt om de problemen die voortvloeien uit het feit dat matrix vermenigvuldigen een niet commutatieve bewerking is op te heffen.

ven en kostprijzen moeten kennen. De berekening van deze twee grootheden kan dan ook als volgt worden uitgevoerd:

(12) $\bar{p}_a \cdot B = \bar{k}_p \cdot C$

(13) $\bar{k}_p = (\bar{p}_a \cdot B) \cdot C^{-1}$

waarin: $\bar{k}_p$ = een vector met kostprijzen en tarieven.

Stellen we in ons voorbeeld:

(14) $\bar{p}_a = 500, 500, 550, 2, 4, 1$

dan wordt:

(15) $\bar{k}_p = 641, 753, 703, 130, 991$

De door ons besproken methode voor het berekenen van kosten en kostprijzen wijkt op een aantal punten af van andere toepassingen van matrixrekening op de kostenverbijzondering.[18]) Het belangrijkste verschil ligt in het feit dat het merendeel van deze methoden geen kostenberekening geven, maar „alleen" een kostprijsberekening. Men gaat uit van gegeven kostenbedragen. Het voordeel van onze benadering wordt gevonden in een aantal punten die we in het kader van dit artikel slechts summier kunnen behandelen, maar die we de lezer, met name voor zijn oordeelsvorming, niet willen onthouden.

1 In onze benadering wordt enerzijds de mogelijkheid geschapen om aan te sluiten bij de procedures van de globale planning, waardoor voor de kostprijsberekening noodzakelijke begrippen als normale bedrijfsdrukte en meest gunstige kwantitatieve verhoudingen van geval tot geval een concrete inhoud kunnen krijgen d.m.v. een optimale oplossing garanderende procedure (l.p.). Anderzijds wordt de mogelijkheid geschapen om een aansluiting te vinden tussen het globale en het detailplan en in het bijzonder om de gevolgen van planwijzigingen op een eenduidiger wijze door te rekenen. Ten aanzien van het optimum moet worden opgemerkt dat we te maken hebben met een locaal optimum. Hierdoor ontstaat naar onze mening echter nog geen strijdigheid met de opvatting van J. L. Mey. Zijn mimimum minimorum krijgt een inhoud niet door de keuze van de technische coëfficiënten, maar door veranderingen in de waardering van de betrokken produktiefactoren.

2 Het gebruik van l.p. maakt het mogelijk om aan de cirkelredenering van de isoquantenanalyse te ontkomen. Immers in dat geval moeten de prijzen van de produktiefactoren voor de uitvoering van de analyse bekend zijn. In ons geval is dat alleen noodzakelijk voor het berekenen van de directe variabele kosten. Gezien de aard van de achter deze kosten schuil gaande produktiefactoren mag men aannemen dat dit geen bezwaren van principiële aard zal ontmoeten. Voor zover er in $\bar{p}_a$ elementen aanwezig zijn die zijn verbonden met vaste produktiefactoren, kan de prijs per eenheid ervan worden bepaald door de geschatte vaste kosten te delen door het betrokken element uit B.

[18]) Voor een bespreking van enkele van die methoden wordt men verwezen naar het artikel van Feenstra, t.a.p.

3 De wijze van berekening van de begrippen normale bedrijfsdrukte en meest gunstige kwantitatieve verhoudingen is niet in strijd met wat de bedrijfseconomie tot nu toe beweert. Het grote voordeel is zelfs dat beide simultaan worden bepaald en dat tevens een, zij het nog lang geen bevredigende, aansluiting wordt gevonden met de afzetkant. Dat laatste gebeurt via de coëfficiënten in de waardefunktie en de assortimentsbeperkingen in de l.p. specificatie.
4 In de kosten- en kostprijsberekening kunnen terugleveringen zonder enig bezwaar worden meegenomen.
5 Er behoeft geen tegenstelling meer te worden gezocht in de benadering van het kostprijsprobleem uitgaande van de direct costing methode of de integrale beschouwing. Immers men behoeft in p_a alleen de prijzen van de vaste produktiefactoren op nul te stellen om de direct costing methode te kunnen toepassen. Het grote voordeel is dan dat men dezelfde berekeningsmethode kan gebruiken, terwijl men tevens aan de direct costing methode een inhoud geeft die het nu in het merendeel der gevallen niet heeft. Immers door ervan uit te gaan dat er homogeen lineaire relaties bestaan tussen hulp- en hoofdkostenplaatsen stelt men dat de indirecte variabele kosten proportioneel variëren met veranderingen in de produktiesnelheden van de eindprodukten. De zin van het onderscheid tussen indirecte en directe variabele kosten voor het bepalen van de brutomarge is daarmee komen te vervallen. Bij toepassing van de geschetste methode levert het berekenen van de variabele kosten per eindprodukt geen problemen meer op.
6 Door gebruik te maken van de rekenautomaat kunnen omvangrijke problemen in korte tijd worden opgelost. Daardoor is het mogelijk ook de kostprijs te berekenen op basis van verschillende uitgangspunten en daarmee de waarde van deze uitgangspunten in de vorm van mutaties in de kostprijs te testen. Daarmee komen we op het probleem dat we in paragraaf 2 hebben gesteld, nl. de vraag in hoeverre de kostprijs kan worden gebruikt voor het nemen van beslissingen. Uit het voorgaande zal het duidelijk zijn dat dat m.b.v. de kostprijs, voor zover het althans de beslissingen in de produktieplanning betreft, niet kan. De kosten en kostprijs zijn geaggregeerde grootheden die ontstaan door een veelheid van beslissingen die t.a.v. aanwendingssnelheden en produktiesnelheden worden genomen. De kostprijs oefent daarop geen invloed uit, zij is juist het resultaat ervan. Dat neemt niet weg dat dit resultaat in vele gevallen zeer goed bruikbaar is voor het waarderen van regels waarmee die beslissingen worden genomen.