

# MATRIX-ALGEBRA ALS HULPMIDDEL BIJ DE KOSTENVERBIJZONDERING

door Drs. D. W. Feenstra

„Starting with grandiose synthetic views instead of working in a piecemeal analytical way, is characteristically nonscientific”  
BUNGE, *Scientific Research I* ('67), p. 30.

## 1. Inleiding

In de Nederlandse bedrijfseconomische literatuur heeft de problematiek inzake de kostenverbijzondering lange tijd in het centrum der belangstelling gestaan. Lag aanvankelijk het accent sterk op het opsporen van causale verbanden en het uitwerken van een aantal min of meer vernuftige administratieve verbijzonderingstechnieken ten behoeve van het bepalen van „de kostprijs”, in een latere fase kreeg men meer oog voor de functie van de kosten als bron van informatie voor tal van problemen waarmee het ondernemingsbeleid wordt gekonfronteerd. In de Amerikaanse kostenliteratuur komt deze accentuering van de betekenis der kosten voor het oplossen van beleidsproblemen tot uiting in titels als b.v. „Managerial Cost Accounting” (Bierman en Dyckman, 1971) en „Cost Accounting, a Managerial Emphasis” (Horngren, 1972). In deze recente literatuur worden tal van voorbeelden gegeven, waaruit blijkt hoe kostenanalyse en kostenverbijzondering van nut kunnen zijn om een aantal problemen van de ondernemingsleiding op te lossen. De ontwikkelingen van de laatste tien jaren hebben laten zien dat de computer in dit verband voor de oplossing van gecompliceerde vraagstukken zinvol kan worden aangewend. We zullen in dit artikel een voorbeeld geven van een mogelijke toepassing van de computer op het gebied der kostenverbijzondering.<sup>1)</sup>

De theorie inzake de kostenverbijzondering heeft een aantal calculatietechnieken opgeleverd, waarvan de productiecentra-methode de meest verfijnde is.<sup>2)</sup> Deze methode poogt door het leggen van diverse causale verbanden de kostensoorten via allerlei kostenplaatsen te verbijzonderen over de kostendragers. In de theorie en de praktijk heeft men op soms subtiële wijze deze kostenplaatsen onderverdeeld in meerdere subcategorieën, waartussen bepaalde relaties bestaan tengevolge van onderlinge dienstverleningen. Veelal wordt in de praktijk bij de verrekening van de prestaties tussen de kostenplaatsen ter wille van de eenvoud aangenomen dat geen zogenaamde „terugleveringen” voorkomen, of dat het wederkerige verband tussen de kostencentra verwaarloosd mag worden. Deze vereenvoudiging kan niet alleen tot verkeerde beleidsbeslissingen leiden ten aanzien van de allocatie der produk-

<sup>1)</sup> De in dit artikel gegeven cijfervoorbeelden zijn fictief en vormen een uiterst geïdealiseerde afbeelding van de gekompliceerde praktijk. Een voor de praktijk toepasbare uitwerking treft men aan in: J. A. P. Bosman, „Computertoepassingen bij budgettering en bedrijfsvergelijking”, *Philips Administration Review*, aug. 1970, p. 77-90. Zie voor een uitwerking in FORTRAN ook: I. v.d. Zijpp, *Opbrengsten, kosten en winsten*, Leiden 1971, p. 68-75.

<sup>2)</sup> Zie voor een compact overzicht inzake de techniek der kostenverbijzondering de *Encyclopedie van de bedrijfseconomie*, deel IIA, Bussum 1971.

tiefactoren, maar is bovendien niet nodig aangezien de moderne wiskunde een techniek verschaft met behulp waarvan complexe relaties tussen kostenplaatsen rekenkundig gezien niet langer problemen opleveren<sup>3</sup>). Met behulp van een aan Williams en Griffin ontleend cijfervoorbeeld zullen we dit nader uitwerken<sup>4</sup>).

## 2. Mogelijke oplossingen van het verbijzonderingsprobleem

Stel dat de volgende relaties tussen een aantal kostenplaatsen bestaan:

Tabel 1: kostenverbijzonderingspercentages

| aan: \ van:         | verbijzondering van hulpkostenplaatsen: |      |      |      |      |
|---------------------|-----------------------------------------|------|------|------|------|
|                     | 1                                       | 2    | 3    | 4    | 5    |
| hulpkostenplaatsen: |                                         |      |      |      |      |
| 1                   | 0                                       | 0    | 5    | 10   | 20   |
| 2                   | 0                                       | 0    | 10   | 5    | 20   |
| 3                   | 10                                      | 10   | 0    | 5    | 20   |
| 4                   | 5                                       | 0    | 10   | 0    | 20   |
| 5                   | 10                                      | 10   | 5    | 0    | 0    |
| eindkostenplaatsen: |                                         |      |      |      |      |
| A                   | 25                                      | 80   | 20   | 0    | 10   |
| B                   | 25                                      | 0    | 30   | 40   | 5    |
| C                   | 25                                      | 0    | 20   | 40   | 5    |
| Totaal              | 100%                                    | 100% | 100% | 100% | 100% |

In voorgaande tabel betekent b.v. het getal 80 in de tweede kolom, dat 80% van de kosten van hulpkostenplaats 2 aan eindkostenplaats A wordt doorberekend.

<sup>3</sup>) Zie ook: A. Grijpdonck, „Kostenverbijzondering bij wederkerig verband tussen de kostencentra”, *Maandblad voor Bedrijfsadministratie en -Organisatie*, 1968, p. 412-417.

<sup>4</sup>) T. H. Williams, C. H. Griffin, „Matrix Theory and Cost Allocation”, *The Accounting Review*, 1964, p. 671-678. Een aantal goede cijfervoorbeelden vindt men verder o.a. in K. Wenke, „Kostenanalysen mit Matrizen”, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 1956, p. 558-576. Uit didaktische overwegingen verkiezen wij hier een „cijfermatige” behandelingswijze boven een strikt formele uitwerking. Wij zien eveneens af van behandeling van de vraag naar de herkomst der gegeven cijferwaarden; voor onze uiteenzettingen vormt tabel 1 het uitgangspunt. Een geformaliseerde behandelingswijze treft men o.a. aan in: A. Bosman, *Systemen, planning, netwerken*, Leiden 1970, hoofdstuk II. De Duitse literatuur levert vele geformaliseerde beschrijvingen. Zie b.v.: A. Adam, J. Roppert, *Betriebliche Leistungsverrechnungen*, Würzburg 1962; A. Adam, F. Ferschl e.a., *Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme*, Würzburg-Wien 1966; H. Münstermann, *Unternehmensrechnung*, Wiesbaden 1969.

Verder is gegeven dat de volgende bedragen direct toerekenbaar zijn aan de verschillende kostenplaatsen:

1: f 8000,—; 2: f 12.000,—; 3: f 6000,—; 4: f 11.000,—; 5: f 13.000,— (totaal 1 t/m 5 dus f 50.000,—); A f 120.000,—; B f 200.000,— en C f 80.000,—.

*Methode 1:* Een eerste mogelijke oplossing is gelegen in het verwaarlozen van de relaties tussen de hulpkostenplaatsen onderling. Eenvoudig valt na te gaan dat de f 50.000,— van de hulpkostenplaatsen als volgt over A, B en C verdeeld worden: A f 22.881,—; B f 13.988,—; C f 13.131,—.<sup>5</sup>)

*Methode 2:* Een iets meer verfijnde oplossing wordt verkregen door wel rekening te houden met onderlinge leveringen tussen de hulpkostenplaatsen; de „terugleveringen” worden echter verwaarloosd. In bovenstaand cijfervoorbeeld treffen we de terugleveringen aan in de vorm van cijfers boven de aangegeven diagonaal van links boven naar rechts onder: de hulpkostenplaatsen 1 en 2 b.v. ontvangen prestaties van de hulpkostenplaatsen 3, 4 en 5. Dit type oplossing is zeer bekend uit de praktijk en de boekhoudliteratuur waar ze verkregen wordt door middel van de kostenverrekenstaat.

Toepassing van deze methode leidt tot de volgende verdeling van de kosten der hulpkostenplaatsen: A f 21.218,—; B f 14.863,—; C f 13.919,—.<sup>6</sup>)

*Methode 3 en 4:* Aangezien in het tweede geval terugleveringen verwaarloosd worden, is het van belang na te gaan welk effect de volgorde der kostenplaatsen op de te verbijzonderen bedragen heeft. Om dit effect zo klein mogelijk te houden, rangschikt men de kostenplaatsen soms wel in volgorde van toenemende afhankelijkheid van andere afdelingen. Indien b.v. de volgorde 5-1-2-4-3 wordt aangehouden tussen de hulpkostenplaatsen wordt aan A, B en C resp. f 21.738,—, f 14.719,— en f 13.543,— toegerekend. Een andere volgorde zal weer een andere uitkomst opleveren. Verwisseling van de hulpkostenplaatsen 4 en 3 geeft als uitkomst: A f 21.444,—; B f 14.793,—; C f 13.763,—.

Geen van de voorgaande oplossingsmethoden is geheel bevredigend, gezien de aanvechtbaarheid der gemaakte vooronderstellingen. Het gevolg van deze soms dubieuze toerekeningsmethoden kan zijn, dat er een onjuist inzicht gaat ontstaan bij de ondernemingsleiding inzake de kosten per eindkostenplaats<sup>7</sup>). De verschillende cijfervoorbeelden hebben immers laten zien dat er

<sup>5</sup>) Zo wordt b.v. aan eindkostenplaats A doorberekend:  $\frac{25}{75} \times f 8000,- + \frac{80}{80} \times f 12.000,- + \frac{20}{70} \times f 6000,- + \frac{10}{20} \times f 13.000,- = f 2667,- + f 12.000,- + f 1714,- + f 6500,- = f 22.881,-$ .

<sup>6</sup>) De berekening voor b.v. kostenplaats A verloopt a.v.:  $\frac{25}{100} \times f 8000,- + \frac{80}{100} \times f 12.000,- + \frac{20}{85} \times (f 6000,- + \frac{10}{100} \times f 8000,- + \frac{10}{100} \times f 12.000,-) + \frac{10}{20} \times (f 13.000,- + \frac{10}{100} \times f 8000,- + \frac{10}{100} \times f 12.000,- + \frac{5}{85} \times f 8000,-) = f 2000,- + f 9600,- + f 1882,- + f 7736,- = f 21.218,-$ .

<sup>7</sup>) Zie ook Grijpdonck, p. 413.

mogelijk een gevoelige relatie kan bestaan tussen de kosten per eindkostenplaats en de gemaakte veronderstellingen (zie tabel 2).

De *theoretisch juiste oplossing* kan o.a. worden gevonden door de relaties tussen de hulpkostenplaatsen uit te schrijven in de vorm van een stelsel van vijf niet homogene lineaire vergelijkingen met vijf onbekenden, waarbij  $X_i$  de kosten van hulpkostenplaats  $i$  voorstelt na ontvangst van toerekeningen van andere kostenplaatsen:<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned} X_1 &= f \ 8.000,- & + 0,05X_3 & + 0,1X_4 & + 0,2X_5 \\ X_2 &= f \ 12.000,- & + 0,1X_3 & + 0,05X_4 & + 0,2X_5 \\ X_3 &= f \ 6.000,- + 0,1X_1 & + 0,1X_2 & & + 0,05X_4 & + 0,2X_5 \\ X_4 &= f \ 11.000,- + 0,05X_1 & + 0,1X_3 & & & + 0,2X_5 \\ X_5 &= f \ 13.000,- + 0,1X_1 & + 0,1X_2 & + 0,05X_3 & & \end{aligned} \quad (1)$$

Oplossing van dit stelsel vergelijkingen door middel van substitutie en eliminatie geeft:  $X_1 = f \ 13.658,-$ ;  $X_2 = f \ 17.503,-$ ;  $X_3 = f \ 13.290,-$ ;  $X_4 = f \ 16.368,-$  en  $X_5 = f \ 16.781,-$  (totaal  $X_1$  t/m  $X_5 = f \ 77.600,-$ )<sup>9)</sup>. De hulpkostenplaatsen 1 t/m 5 leveren aan de eindkostenplaatsen prestaties ter waarde van resp.:  $0,75 \times f \ 13.658,-$ ;  $0,80 \times f \ 17.503,-$ ;  $0,70 \times f \ 13.290,-$ ;  $0,80 \times f \ 16.368,-$  en  $0,20 \times f \ 16.781,-$  (in totaal  $f \ 50.000,-$ ).

Nadere uitwerking en toerekening over A, B en C volgens de gegeven verhoudingscijfers (zie tabel 1) levert als juiste toerekening op: A  $f \ 21.755,-$ ; B  $f \ 14.787,-$  en C  $f \ 13.458,-$ <sup>10)</sup>.

In tabel 2 vatten we de tot nu toe verkregen resultaten samen.

Tabel 2: Uitkomsten diverse verbijzonderingsmethoden in een fictief geval

|                  | eindkostenplaats |            |            |            |
|------------------|------------------|------------|------------|------------|
|                  | A                | B          | C          |            |
| methode 1        | f 22.881,-       | f 13.988,- | f 13.131,- | f 50.000,- |
| methode 2        | f 21.218,-       | f 14.863,- | f 13.919,- | f 50.000,- |
| methode 3        | f 21.738,-       | f 14.719,- | f 13.543,- | f 50.000,- |
| methode 4        | f 21.444,-       | f 14.793,- | f 13.763,- | f 50.000,- |
| juiste oplossing | f 21.755,-       | f 14.787,- | f 13.458,- | f 50.000,- |

Geen van de voorgaande methoden 1 t/m 4 kwam tot de juiste verdeling. Zolang het vergelijkingenstelsel niet te omvangrijk is, d.w.z. een gering aantal vergelijkingen en variabelen bevat, kan de oplossing eenvoudig verkregen worden door middel van substitutie en eliminatie. Indien evenwel het aantal variabelen (en vergelijkingen) groter is, moeten we een beroep doen op de

<sup>8)</sup> Via een iteratief proces van toerekeningen zal deze oplossing eveneens gevonden kunnen worden.

<sup>9)</sup> In paragraaf 4 gaan we nader in op deze schijnbaar vreemde uitkomst.

<sup>10)</sup> De toerekening aan b.v. A geschiedt a.v.:  $\frac{25}{100} \times f \ 13.658,- + \frac{80}{100} \times f \ 17.503,- + \frac{20}{100} \times f \ 13.290,- + \frac{10}{100} \times f \ 16.781,- = f \ 21.755,-$ .

matrix-algebra. Wij kunnen in het kader van dit artikel slechts enkele kernbegrippen uit deze matrix-algebra aan de orde stellen<sup>11</sup>).

### 3. Enkele kernbegrippen uit de matrix-algebra

Onder een matrix verstaat men een verzameling van elementen (b.v. getallen) die gerangschikt zijn in rijen en kolommen. Voor een matrix  $A$  met  $m$  rijen en  $n$  kolommen (een  $m \times n$  matrix, ook wel genoemd een matrix van de orde  $m, n$ ) gebruikt men de volgende notatie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De elementen  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  vormen een voorbeeld van een rij; de elementen  $a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}$  vormen een kolom. Met matrices kunnen diverse soorten rekenkundige operaties worden verricht zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en inverteren (waarover straks meer). Afhankelijk van het aantal rijen en kolommen en de getalswaarden der elementen kunnen een groot aantal adjectieven worden toegevoegd aan het begrip matrix. Zo kennen we o.a. de eenheidsmatrix, de vierkante matrix, de driehoeksmatrix en de nulmatrix. Voor een gedetailleerde uiteenzetting inzake de diverse typen matrices en de soorten operaties die uitgevoerd kunnen worden alsmede de voorwaarden waaronder, wordt men verwezen naar elementaire moderne wiskunde-leerboeken.

Een zeer belangrijk toepassingsgebied van de matrix-algebra is gelegen in het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Stel de volgende 2 vergelijkingen met 2 onbekenden zijn gegeven:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c_1 \\ px_1 + qx_2 &= c_2 \end{aligned} \quad (2)$$

In matrix-notatie schrijven we:

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ px_1 + qx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Het linkerlid kan als een produkt van 2 matrices worden geschreven.

Er ontstaat dan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

<sup>11</sup>) Er bestaan vele goede inleidingen tot de theorie der matrix-algebra. Wij noemen slechts L. Lips, *Wiskunde voor economen*, Groningen, 1966, hfdst. 18; M. H. Peston, *Elementary Matrices for Economics*, Londen, 1969; D. C. Murdock, *Linear Algebra for Undergraduates*, Londen, 1957 en J. Johnston, *Econometric Methods*, New York, 1963, hfdst. 3, deel I (de laatstgenoemde twee werken gaan aanzienlijk verder dan de eerste twee).



De uitkomst van de vermenigvuldiging van de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

is gedefinieerd als:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\text{Cijfervoorbeeld: } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

In de matrix-algebra gelden t.a.v. het vermenigvuldigingsproces enigszins afwijkende regels ten opzichte van de gewone vermenigvuldiging van getallen. Het produkt van de matrices A en B hoeft nl. niet gelijk te zijn aan dat van B en A; anders geformuleerd: voor- en navermenigvuldigingen kunnen tot verschillende uitkomsten leiden.

In plaats van vergelijking (4) kan men rechtstreeks uit vergelijking (2) de volgende matrix-vermenigvuldiging afleiden:

$$A \cdot X = C \quad (5)$$

X en C worden kolomvectoren genoemd.

Vergelijking (5) kan op soortgelijke wijze worden opgelost als de vergelijking  $d \cdot x = e$ , waarin d en e gegeven zijn ( $d \neq 0$ ). In dat geval geldt  $x = \frac{e}{d}$  of

$d^{-1} \cdot e$ . In de matrix-algebra wordt de oplossing van vergelijking (5) verkregen door C voor te vermenigvuldigen met de zogenaamde *inverse* van de matrix A,

$$X = A^{-1} \cdot C \quad (6)$$

Onder de inverse (in het Duits: Kehrmatrix) van een vierkante matrix A verstaat men een matrix  $A^{-1}$ , waarvoor geldt  $A \cdot A^{-1} = E$ . In deze formule stelt E een eenheidsmatrix voor (een matrix met enen op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder; de overige elementen zijn gelijk aan 0).

Het berekenen van de inverse van een matrix is, vooral in geval van relatief grote matrices, een tijdrovende affaire waarbij een aantal vrij ingewikkelde operaties moeten worden uitgevoerd. Er bestaan evenwel standaard-computerprogramma's met behulp waarvan binnen enkele seconden vrij grote matrices geïnverteerd kunnen worden. Een eenvoudige methode ter berekening van de inverse van een matrix bestaat uit het uitvoeren van een aantal bewerkingen waardoor de matrix wordt omgevormd tot een eenheidsmatrix. Door dezelfde bewerkingen eveneens uit te voeren op de eenheidsmatrix ontstaat hieruit de inverse van de beginmatrix. De volgende bewerkingen kunnen

worden uitgevoerd op de rijen of de kolommen van een matrix ter verkrijging van de inverse:<sup>12)</sup>

- a. het onderling verwisselen van rijen (kolommen);
- b. het vermenigvuldigen van de elementen van een rij (kolom) met een constante;
- c. het optellen of aftrekken van alle elementen van een rij (kolom) van de overeenstemmende elementen van een andere rij (kolom);
- d. het combineren van de onder b. en c. genoemde mogelijkheden.

Een cijfervoorbeeld ter toelichting. Stel dat we de volgende matrix willen inverteren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

De volgende stappen leveren de gewenste inverse:

- (i) de eerste rij aftrekken van de tweede en van de derde rij;
- (ii) tweemaal de tweede rij aftrekken van de eerste rij en driemaal de tweede rij aftrekken van de derde rij, waarna deze derde rij met  $\frac{1}{3}$  wordt vermenigvuldigd;
- (iii) de derde rij optellen bij de eerste rij en tweemaal de derde rij aftrekken van de tweede rij.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{stap i})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{stap ii})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{stap iii})$$

We gaan hier niet verder in op de vereisten voor het kunnen berekenen van inverses evenmin als op de eigenschappen van inverse matrices.

Tot slot van deze paragraaf geven we een kort cijfervoorbeeld waarin een drietal lineaire vergelijkingen met 3 onbekenden worden opgelost met behulp van matrix-algebra.

<sup>12)</sup> Zie Grijpdonck, p. 414.

$$\begin{aligned} \text{Stel: } x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 31 \\ x_1 + 5x_2 + 12x_3 &= 65 \end{aligned} \quad (7)$$

Oplossing in matrix-notatie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 31 \\ 65 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 31 \\ 65 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 31 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Dus:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  en  $x_3 = 4$ .

#### 4. Matrixpresentatie van het cijfervoorbeeld uit paragraaf 2

Het in paragraaf 2 gegeven cijfervoorbeeld kan met behulp van matrix-algebra als volgt worden opgelost:

$$\begin{aligned} X_1 &\quad - 0,05X_3 - 0,1X_4 - 0,2X_5 = 8.000 \\ &\quad X_2 - 0,1X_3 - 0,05X_4 - 0,2X_5 = 12.000 \\ -0,1X_1 - 0,1X_2 + X_3 - 0,05X_4 - 0,2X_5 &= 6.000 \\ -0,05X_1 &\quad - 0,1X_3 + X_4 - 0,2X_5 = 11.000 \\ -0,1X_1 - 0,1X_2 - 0,05X_3 &\quad + X_5 = 13.000 \end{aligned} \quad (10)$$

Het vergelijkingenstelsel (10) is niet anders dan een herformulering van het stelsel (1).

In matrix-notatie:  $A \cdot X = B$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,05 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 1 & -0,1 & -0,05 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 1 & -0,05 & -0,2 \\ -0,05 & 0 & -0,1 & 1 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & -0,05 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8.000 \\ 12.000 \\ 6.000 \\ 11.000 \\ 13.000 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$



$X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) vertegenwoordigt de som van de reeds toegerekende kosten aan kostenplaats  $i$  en de door andere kostenplaatsen aan  $i$  toegerekende kosten. De matrix  $A$  kan rechtstreeks uit tabel 1 (zie paragraaf 2) worden afgeleid door de matrix van kostenverbijszonderingspercentages (geschreven als perunages) tussen de hulpafdelingen af te trekken van een eenheidsmatrix van de orde  $5,5^{13}$ ). Uitwerking van bovengenoemde vergelijking geeft de volgende inverse:

$$\begin{pmatrix} 1,039 & 0,033 & 0,079 & 0,109 & 0,252 \\ 0,041 & 1,038 & 0,125 & 0,062 & 0,253 \\ 0,135 & 0,132 & 1,041 & 0,072 & 0,276 \\ 0,089 & 0,038 & 0,123 & 1,017 & 0,253 \\ 0,115 & 0,114 & 0,072 & 0,021 & 1,064 \end{pmatrix}$$

Als uitkomst voor  $X_1$  tot en met  $X_5$  vinden we:

$$\begin{pmatrix} 13658 \\ 17503 \\ 13290 \\ 16368 \\ 16781 \end{pmatrix}$$

De berekening van de inverse matrix  $A^{-1}$  blijkt de essentie van het probleem te vormen. De inverse is meer dan een louter rekentechnische grootheid; de elementen van de inverse geven nl. inzicht in de herkomst van de kosten per kostenplaats. Zo bestaan b.v. de in totaal aan kostenplaats 1 toegerekende kosten uit:  $1,039 \times 100\% \times f 8000,- + 0,033 \times 100\% \times f 12.000,- + \dots + 0,252 \times 100\% \times f 13.000,- = f 8.312,- + f 396,- + \dots + f 3.276,- = f 13.658,-$ .

Op het eerste gezicht lijkt het vreemd dat de som van de  $X_i$ 's groter is dan de som van de door de hulpkostenplaatsen te verdelen kosten ( $f 77.600,-$  resp.  $f 50.000,-$ ). De oorzaak van deze afwijking is gelegen in de omstandigheid dat bij de berekening der  $X_i$ 's nog geen rekening is gehouden met verrichte prestaties geleverd aan andere afdelingen (alleen belastingen zijn verwerkt, crediteringen moeten nog plaats vinden). Langen, Manes en Livingstone hebben het voorgaande model dusdanig getransformeerd, dat een simultane oplossing van de debiteringen en crediteringen per kostenplaats wordt verkregen<sup>14</sup>). Minch en Petri hebben weer een andere oplossingsmethode voorgesteld: houdt eerst rekening met de verrichte prestaties (de crediteringen) en verwerk daarna de ontvangen prestaties (de debiterin-

<sup>13</sup>) In de Duitse literatuur heeft men  $A$  de treffende benaming „Verflechtungsmatrix” gegeven.

<sup>14</sup>) H. Langen, „Istkostenrechnung in Matrizendarstellung”, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 1964, p. 1-14; R. P. Manes, „Comment on Matrix Theory and Cost Allocation”, *The Accounting Review*, 1965, p. 640-643; J. L. Livingstone, „Input-Output Analysis for Cost Accounting, Planning and Control”, *The Accounting Review*, p. 48-64.

gen)<sup>15</sup>). De uitkomsten van deze laatste methode geven eenzelfde verdeling van de kosten over A, B en C als de zojuist genoemde methoden. De verdeling van de kosten der hulpkostenplaatsen over de eindkostenplaatsen A, B en C geschiedt vervolgens via:

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,80 & 0,20 & 0 & 0,10 \\ 0,25 & 0 & 0,30 & 0,40 & 0,05 \\ 0,25 & 0 & 0,20 & 0,40 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13658 \\ 17503 \\ 13290 \\ 16368 \\ 16781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.755 \\ 14.787 \\ 13.458 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aan eindkostenplaats A worden dus toegerekend f 21.755,—, aan B f 14.787,— en aan C f 13.458,—.

De totale kosten per eindkostenplaats volgen uit:

$$\begin{pmatrix} 21.755 \\ 14.787 \\ 13.458 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120.000 \\ 200.000 \\ 80.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 141.755 \\ 214.787 \\ 93.458 \end{pmatrix} \quad (13)$$

## 5. Conclusies

De matrix-algebra is een geschikt hulpmiddel ter oplossing van verbijzonderingsvraagstukken in de kostencalculatie; vooral in geval van complexe relaties tussen kostenplaatsen met diverse „terugleveringen” kan ter verkrijging van een snelle en theoretisch juiste oplossing gebruik worden gemaakt van de matrix-algebra. Wij zijn er daarbij steeds van uitgegaan dat de verbijzondering der kosten relevante informatie verschaft voor de ondernemingsleiding.

De computer is een belangrijk hulpmiddel bij het snel uitvoeren van de relatief bewerkelijke operaties welke de matrix-algebra met zich mee kan brengen.

<sup>15</sup>) R. Minch, E. Petri, „Matrix Models of Reciprocal Service Cost Allocation”, *The Accounting Review*, 1972, p. 576-580.