

OVER EEN SYSTEMATISCHE BEREKENING VAN ALTERNATIEVE PLANNEN MET BEHULP VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

door Dr. Ir. J. Mol

1 Inleiding

Bij de toepassing van de lineaire programmering volstaan vele onderzoekers met de vaststelling van slechts één program, het zgn. optimale program of optimale plan. Een dergelijke werkwijze is slechts verantwoord indien in het programmeringsmodel de technische relaties werkelijkheidsgetrouw zijn en indien de doel-functie in hoge mate strookt met doel en verwachtingen van de beslissende instantie.

Zoals bekend is deze ideale overeenstemming tussen model en werkelijkheid niet steeds te verwezenlijken. Zo wordt bijv. in lineaire programmeringsmodellen veelal volledige zekerheid verondersteld t.a.v. de opgenomen technische en financiële grootheden, terwijl deze in de praktijk meestal stochastisch, of erger, onzeker zijn. Evenzeer zullen heel vaak de in het model opgenomen lineaire produktiefuncties niet geheel stroken met de werkelijkheid.¹⁾ Vervolgens dient men kritisch te staan t.a.v. het denkbeeld dat er steeds een optimum plan zou kunnen worden aangewezen. Zeer vaak zal het nl. voorkomen dat twee of meer alternatieve plannen niet kunnen worden gerangschikt in een geordende rij van aantrekkelijkheid.²⁾ Dit wordt veroorzaakt door de omstandigheid dat in de praktijk verschillende alternatieve plannen niet op één aspect, bijv. op winstverwachtingen alleen, beoordeeld worden; ook andere aspecten worden in de beoordeling betrokken zoals bijv. de mate van conjunctuurgevoeligheid der plannen, de gecompliceerdheid van de plannen enz. enz.

Zo zal het duidelijk zijn dat een beslissende instantie moeilijkheden kan onder-vinden bij het kiezen uit bijv. twee plannen A en B, waarbij bijv. plan A in zekere mate superieur is wat betreft het niveau van de winstverwachtingen, maar plan B wat betreft de mate van ongevoeligheid voor de conjunctuur. Bij een beslissende instantie bestaande uit meerdere personen kan er dan zelfs een situatie ontstaan waarbij de ene partij plan A optimaal zal noemen terwijl de andere partij plan B op de eerste plaats van voorkeur zal plaatsen.

Om bovenstaande redenen kan het voor de praktijk van belang zijn om bij de lineaire programmering niet slechts één plan te berekenen (het *mathematisch*-optimale plan), maar daarnaast een reeks van technisch-uitvoerbaar alternatieve plannen in de omgeving van dit zgn. optimale. Uit deze verzameling van optimum oplossing en nabije alternatieve oplossingen kan dan vervolgens de beslissende instantie een voorkeursplan kiezen. Bij deze keuzeprocedure zullen dan zo goed als mogelijk, al die factoren in aanmerking genomen kunnen worden, welke min of meer bewust buiten het model zijn gehouden vanwege hun imponderabel en/of complicerend karakter.

¹⁾ Wij merken evenwel op dat niet-lineaire produktiefuncties op betrekkelijk eenvoudige wijze benaderend in een lineair model kunnen worden ingebouwd, mits deze functies trekken van verminderende meeropbrengsten vertonen. Zie t.a.v. dit punt: J. Mol: „Interacties, beperkingen en veelheid van technieken in bedrijfseconomische calculaties en proefopzetten”, *Landbouwkundig tijdschrift* 72-20 p.p. 838-846, 1961.

²⁾ J. L. Bouma, „De toepassing van intern-gedragsmodellen in de bedrijfseconomie”, Stenfert Kroese, Leiden 1967. Inaug. rede.

De bedoeling van dit artikel is aan te geven hoe op systematische en efficiënte wijze een gehele verzameling van plannen in de omgeving van het mathematisch optimum kan worden vastgesteld. In een daaropvolgend artikel zal nog worden aangetoond dat de verkregen gedetailleerde kennis van het transformatievlak mogelijkheden opent op een vrij eenvoudige manier te komen tot zgn. gemengd-discrete plannen in de buurt van het optimum; dit zijn plannen aan welke men de gebruikelijke eis stelt van technische uitvoerbaarheid, waarbij echter één of meer activiteits-niveaus moeten uitkomen op gehele getallen. Ook dit laatste is van praktisch belang. Wij denken hier niet slechts aan produktieniveaus die om technische redenen op gehele getallen dienen uit te komen. Daarnaast zijn van belang programmeringen met speciale activiteiten, zoals de mogelijke aankoop van bepaalde produktiefactoren in gehele volume-eenheden.

Wij merken op dat het eerste probleem nl. de systematische vaststelling van een gehele verzameling van technische uitvoerbare plannen in de omgeving van het optimum reeds werd uiteengezet door Bosman en Mol. Eveneens werd dit probleem door Van de Panne gesteld en opgelost op een enigszins andere wijze dan is voorgesteld door Bosman en Mol.³⁾ Ten behoeve van de lezer zullen evenwel in het kort de essentiële trekken van de door Bosman en Mol gegeven oplossing hier worden weergegeven.⁴⁾ Aan het slot van dit artikel zal een praktische toepassing van de methode worden gegeven.

2 Mathematische formulering van het probleem

De lineaire programmering gesteld in de termen van matrixalgebra luidt aldus:

$$\text{maximeer } \rho = p'x \quad (1)$$

met als nevenvoorwaarden

$$Ax = b \quad (2)$$

$$\text{en } x \geq 0 \quad (3)$$

Hierbij is $A = [a^1, a^2, \dots, a^b, \dots, a^n]$ een matrix van n vectoren a van de m^{de} orde, p een vector van de n^{de} orde en b een vector van de m^{de} orde. Al de vectoren x die voldoen aan (2) en (3) vormen een convexe verzameling. Meestal kan een oneindig aantal van deze oplossingen worden vastgesteld. Zo is bijv. elke convexe lineaire combinatie van bijv. twee van deze vectoren x weer een oplossing die voldoet aan (2) en (3). Wij zullen daarom zoals gebruikelijk alleen aandacht besteden aan de zgn. extreme-puntoplossingen. Stel nu dat een vector x_{opt} de optimale oplossing is, met een optimum ρ_{opt} .

Wij willen nu alle extreme-puntoplossingen vinden in de omgeving van x_{opt} ,

$$\text{zodanig dat } \rho = p'x \geq \rho_{\text{opt}} - \frac{q}{100} \cdot \rho_{\text{opt}} \quad (4)$$

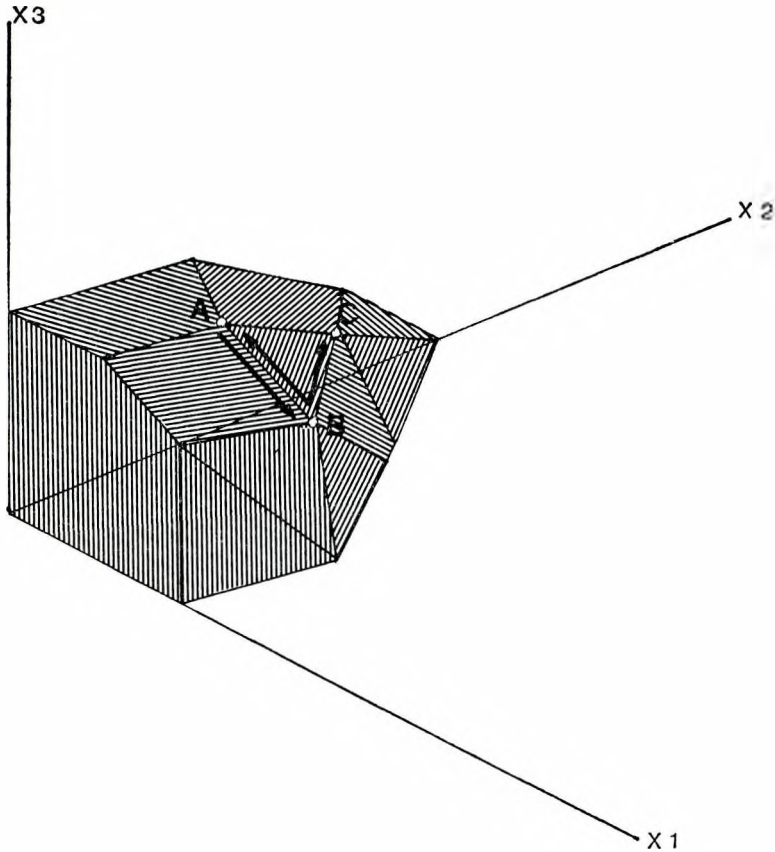
Daarbij is q een te kiezen getal. Dit getal mag niet te groot zijn omdat anders de te vinden alternatieven niet meer aantrekkelijk zijn uit financieel oogpunt.

³⁾ A. Bosman en J. Mol: „Near optimality analysis: an application to crop rotation planning. C. van de Panne: „Post-optimality analysis via the reverse simplex method and the Tarry method.” Papers presented at the Warsaw meeting of T.I.M.S. 1966.

⁴⁾ Een uitvoerige uiteenzetting van de algoritme en een vertaling ervan in Algol kan desgewenst worden aangevraagd bij het Instituut voor Economisch Onderzoek van de R.U. te Groningen.

3 Vaststelling van alternatieve plannen

Wij herinneren eraan dat de optimum oplossing wordt gegenereerd door het laatste tableau in de simplex-procedure. Als nu door een bepaalde simplex-iteratie een van de vectoren in de basis van dit eind-tableau, neem aan a^b , wordt vervangen door een vector buiten de basis, dan krijgen wij een nieuw simplex-tableau met een nieuwe extreme-puntoplossing. Grafisch is een dergelijke iteratie, voor vectoren van de 3^{de} orde, geschetst in fig. 1 door middel van een pijl die loopt van A (optimum) naar B (extreme-puntoplossing van het nieuwe simplex-tableau).



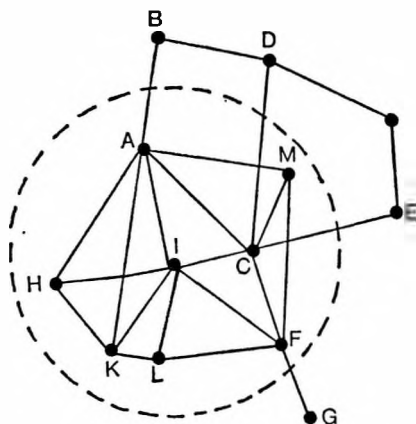
Figuur 1

Grafische voorstelling van simplex-iteraties door pijlen.

Als nu in het nieuw gevonden tableau een vector uit de basis wordt vervangen door een vector buiten de basis, dan wordt weer een nieuw tableau gegenereerd met een andere extreme-puntoplossing (bijv. C in fig. 1). Zou echter bij deze iteratie de vector a^b zijn gekozen als „inkomende” vector, dan zou het oorspronkelijke eind-tableau zijn teruggevonden (iteratie voorgesteld door de pijl lopend van B naar A). Het probleem is nu al deze punten te vinden in de omgeving van A door middel van deze iteraties en wel op een systematische en efficiënte wijze.

Hiertoe willen wij de extreme punten (A, B ...) beschouwen als knopen in een

doolhof van wegen en de verzameling van alle convex lineaire combinaties van twee naast elkaar liggende extreme punten als paden in dit doolhof. Het probleem om alle knopen van het doolhof systematisch te vinden, kan dan worden geïnterpreteerd als een systematisch doorlopen van het doolhof. Aangezien wij alleen belangstelling hebben voor een gedeelte van het doolhof, nl. het gedeelte in de buurt van het optimum, krijgen wij te maken met paden welke dit relevante deel overschrijden. Deze paden zullen eind-paden worden genoemd en de knopen aan het eind van deze paden eind-knopen (zie fig. 2).



Figuur 2

Gedeelten van een doolhof bevattende de knopen A, M, F, L, K, H, I, C, met de eindknopen B, D, E, en G en eind-paden AB, CD, CE en FG.

Teneinde dit doolhof te doorlopen maken we gebruik van de methode van Trémaux.⁵⁾ De regels van Trémaux luiden als volgt (zie fig. 2):

- Regel 1:* Als een willekeurig gekozen pad IC eindigt in de knoop C, die geen eindknoop is en die nog niet eerder is bereikt, ga dan verder langs een willekeurig te kiezen ander pad bijv. CF.
- Regel 2:* Als echter C al eens eerder is bereikt (of als C een eindknoop is) en als IC voor de eerste keer wordt doorlopen, ga dan terug (m.a.w. sla dan de omgekeerde richting CI in).
- Regel 3:* Als C wel in een vroeger stadium is bereikt en als het pad IC al eens eerder is doorlopen, vervolg dan de wandeling langs een pad dat nog niet is doorlopen (3a) of als een dergelijk pad niet aanwezig is langs een pad dat vroeger slechts één keer is doorlopen (3b).

De lezer zal bij toepassing van deze regels bemerken dat elk pad precies twee keer wordt doorlopen (één keer in elke richting) en dat hij terugkomt in het startpunt I.

Wij zijn nu in staat een doolhof op te bouwen dat alle extreme-puntoplossingen

representeert met opbrengsten $-z_{\text{opt}} \leq d \leq \frac{q}{100} \cdot p_{\text{opt}}$.

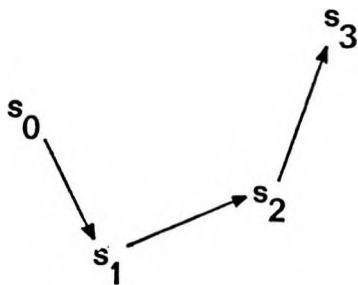
⁵⁾ D. König: „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“, Leipzig 1936 pp. 37-41, Akademische Verlagsgesellschaft, M.B.H.

Daartoe noemen we het laatste tableau van de simplex-procedure S_0 . Wij kiezen nu arbitrair één van de $(n-m)$ vectoren buiten de basis van S_0 als „inkomende” vector ter vervanging van een vector, zeg a^h , welke nu in deze basis aanwezig is.

Grafisch vertaald: wij slaan arbitrair een van de $(n-m)$ paden in dat voert naar een naastbij liggende knoop. Hierbij dient eerst onderzocht te worden of geen op-

lossing wordt verkregen met een opbrengst $< \rho_{\text{opt}} - \frac{q}{100} \cdot \rho_{\text{opt}}$, m.a.w. of het ge-

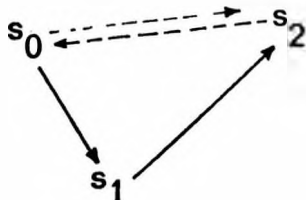
kozen pad al of niet voert naar een eind-knoop. Zou dit het geval zijn dan onthouden wij dat dit pad nooit meer mag worden ingeslagen⁶⁾. Voert het gekozen pad niet tot een eindknoop, dan wordt een nieuw tableau S_1 gegenereerd en de nieuw gevonden oplossing opgeschreven. In dit stadium weten wij dat S_1 nog niet eerder is gevonden zodat regel 1 van Trémaux van toepassing is. Wij vervolgen dus met een nieuwe iteratie $S_1 \rightarrow S_2$ waarbij eindpaden weer moeten worden vermeden. Eveneens dient a^h als „inkomende” vector niet gekozen te worden, omdat anders S_0 teruggevonden zou worden (dit zou in strijd zijn met regel 1). Ook in dit stadium is S_2 weer een nieuw tableau waarvan de oplossing moet worden bewaard. Vervolgens, weer regel 1 van Trémaux toepassend, voeren wij de iteratie $S_2 \rightarrow S_3$ uit (weer met vermindering van eindknoten en vermindering van de weg $S_2 \rightarrow S_1$). Wij onderzoeken, *alvorens de gehele iteratie $S_2 \rightarrow S_3$ uit te voeren*, of S_3 in een vroeger stadium werd gevonden. Zo niet (mogelijkheid één) dan voeren wij de gehele iteratie uit en bepalen S_3 (regel 1 van Trémaux, zie fig. 3).



Figuur 3

Iteratie $S_2 \rightarrow S_3$ volgens regel 1 van Trémaux (mogelijkheid één).

Werd S_3 echter wel eerder gevonden (mogelijkheid twee) kan keren wij op ons pad terug naar S_2 , volgens de 2^{de} regel van Trémaux (zie fig. 4).

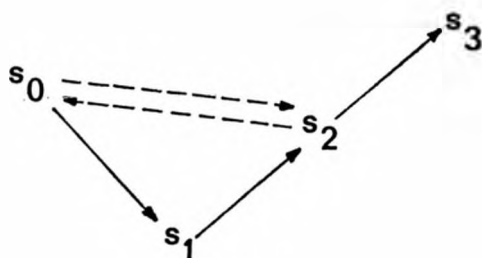


Figuur 4

Keuze van de terugweg $S_0 \rightarrow S_2$ volgens tweede regel van Trémaux (mogelijkheid twee).

⁶⁾ Voor de wijze waarop de tussentijdse rekeninformaties moeten worden bewaard verwijzen wij naar het in voetnoot ³⁾ genoemde „paper” van Bosman en Mol.

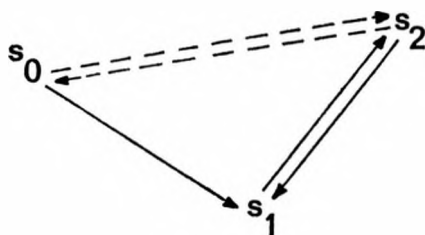
Treedt mogelijkheid één op (fig. 3) dan gaan wij met S_3 verder op dezelfde wijze als is besproken bij tableau S_2 . Doet zich echter mogelijkheid twee (fig. 4) voor dan komen wij terug bij S_2 . Dit houdt in het ontmoeten van een tableau dat reeds eerder optrad en het lopen over een pad dat reeds eerder werd begaan (zie stippellijn in fig. 4 van S_2 naar S_0) zodat wij nu regel 3a van Trémaux dienen toe te passen. Wij zien dan uit naar een ander pad dat nog niet is doorlopen en dat voert van de extreme-puntoplossing van S_2 naar een volgende naastbijliggende puntoplossing (fig. 5).



Figuur 5

Iteratie $S_2 \rightarrow S_3$ volgens regel 3a van Trémaux.

Is er geen open pad meer aanwezig, dan passen wij regel 3b van Trémaux toe en kiezen een pad dat in een vroeger stadium slechts één keer werd doorlopen. In dit geval slaan wij de richting $S_2 \rightarrow S_1$ in (fig. 6).



Figuur 6

Iteratie $S_2 \rightarrow S_1$ volgens regel 3b van Trémaux.

Op deze wijze doorgaand zullen we op het laatst weer aankomen bij S_0 . Wij zijn dan in het bezit van een eindig aantal tableaux S_0 t/m S_n met de daarbij behorende technisch uitvoerbare plannen.

4 Een praktische toepassing

Ten behoeve van een Gronings akkerbouwbedrijf van 40 ha werd een zgn. optimum plan berekend op grond van een simplextableau met 43 beperkingen en 19 activiteiten.⁷⁾ Geoptimaliseerd werd een op een bepaalde wijze gedefinieerd financieel surplus. Het optimum surplus bedroeg f 49.249,—. Vervolgens werden alle

⁷⁾ P. Lanting en J. Mol: „Welk bouwplan in de Noordelijke bouwstreek?” *Groninger Landbouwbld* 1965, nr. 47 p. 1305.

alternatieve plannen berekend in de nabijheid van dit optimum en wel de plannen met een surplus liggend tussen f 49.249,— en f 49.249,— minus $\frac{1}{4}$ procent van f 49.249,— (= 49.126,—).

Het bleek dat er zich in dit traject 106 alternatieve plannen bevonden. Deze alternatieven werden met de TR 4 van de Groninger Universiteit berekend in 11,2 minuten. In deze tijd werden tevens alle 106 oplossingen afgedrukt, naast het gehele simplex eindtableau van de optimum oplossing. Eveneens werden nog in deze 11,2 minuten de laatste regels (van zgn. schaduw prijzen) afgedrukt van de 106 tableaux welke de 106 alternatieve oplossingen genereerden.

Wij merken over de praktische betekenis van de oplossingen het volgende op. Allereerst bevonden er zich vele plannen tussen de 106 berekende, welke onderling slechts weinig verschilden uit praktisch oogpunt. Dit is bijv. het geval met alternatieven met activiteitsniveaus in de buurt van nul. Zo kan men bijv. gemakkelijk plannen vinden als onderstaande plannen I en II welke uit praktisch oogpunt bijna gelijk zijn.

Praktisch gelijke plannen vanwege activiteitsniveaus in de buurt van nul.

Plan I		Plan II	
Zomertarwe	14 ha	Zomertarwe	13,41 ha
Wintergerst	5,35 „	Wintergerst	5,34 „
Zomergerst	0,28 „	Zomergerst	— „
Haver	6,37 „	Haver	6,74 „
Poot-aardappelen	3,— „	Poot-aardappelen	3,— „
Vlas	— „	Vlas	0,11 „
Lucerne	3,07 „	Lucerne	3,51 „
Zaad-bieten	1,12 „	Zaad-bieten	1,12 „
Suikerbieten	6,75 „	Suikerbieten	6,75 „
Surplus	f 49.135,43	Surplus	f 49.126,92

Belangrijk voor de praktijk was het dat alle alternatieven slechts weinig fluctuaties te zien gaven in de te verbouwen hoeveelheid bieten en aardappelen. Een ander extreem was daarentegen het gewas lucerne dat in sommige plannen aanwezig was met ± 3 ha en in andere met ± 9 ha. Van belang was het vervolgens dat een aantal beoordelaars van de plannen direct reeds het plan met het hoogste surplus verwierpen, omdat dit een oppervlakte van 11 ha zomertarwe aangaf. Dit gewas leed enkele jaren geleden soms ernstig door aantasting van de tarwestengelmug (*Haplodiplosis Equestris*). Deze beoordelaars vonden de verbouw van 11 ha zomertarwe te riskant; zij gaven de voorkeur aan een plan met slechts 4 ha zomertarwe met een lager te verwachten surplus.

Zoals is opgemerkt kan het vervolgens voor de praktijk van belang zijn om te komen tot oplossingen met gehele getallen. Bij ons voorbeeld is het denkbaar dat bepaalde landbouwers, gezien de verkaveling van hun bedrijven, slechts oplossingen accepteren luidend in gehele ha's. De hieraan verbonden problematiek zal, zoals reeds is vermeld, in een volgend artikel worden behandeld.