

ENKELE VERBANDEN TUSSEN DIVERSE FORMULERINGEN VAN HET MICRO-ECONOMISCH INPUT-OUTPUTMODEL EN IMPLICATIES

door A. Limère

Inleiding

In het decembernummer 1974 van het M.A.B. verscheen van de hand van drs. C. van Halem een bijdrage genaamd: „Bedrijfseconomische betekenis van de input-outputanalyse”. In dit artikel wordt op een deskundige wijze een ruim overzicht gegeven van de huidige stand van onderzoek naar de toepassingsmogelijkheden in de bedrijfseconomie van het input-output model, dat in de macro-economische theorie werd geïntroduceerd door W. Leontiev¹). Er zijn hierbij voldoende argumenten voorhanden om de input-outputanalyse op een nuttige wijze te transformeren tot een bedrijfseconomisch model voor complexe produktiestructuren waarbij interdependenties optreden. Dat deze input-output benadering van de bedrijfshuishouding meer en meer aan bod komt, zowel in het theoretisch onderzoek als in de praktijk, valt niet meer te ontkennen. Verscheidene publikaties over de laatste jaren in vakkundige tijdschriften en de reeds in diverse grote ondernemingen ontwikkelde toepassingen van deze theorie getuigen hiervan²).

C. van Halem onderkent twee belangrijke formuleringen van het I.O.-model, namelijk één die afgestemd is op planningsvraagstukken in de produktiesfeer, een tweede voor het oplossen van kostenvraagstukken met name de kostenallocatie en het berekenen van kostprijzen per eenheid. De band tussen de twee toepassingen wordt daarbij gelegd aan de hand van een numeriek voorbeeld.

Beide formuleringen verschillen echter essentieel van elkaar, in dit opzicht dat voor planningsvraagstukken een I.O.-model wordt gehanteerd geformuleerd in inputcoëfficiënten terwijl voor de kostenallocatie gebruik wordt gemaakt van de outputcoëfficiënten die kostenverdeelsleutels worden genoemd³). De elementen van de transactiematrix worden in het eerste geval per kolom gedeeld door de overeenkomstige rijtotalen wat ons inputcoëfficiënten geeft die uitdrukken uit welke bestanddelen één eenheid van ieder produkt is samengesteld, terwijl in het tweede geval dezelfde elementen rij voor rij worden gedeeld door de rijtotalen (gelijk aan de kolomtotalen) wat ons outputcoëfficiënten baart d.i. de proportie waarmede de eenheid van ieder produkt wordt aangewend in de overige produkten als tussenfabrikaten en in de eindvraag. Laatstgenoemde coëfficiënten zijn dan de maatstaf voor de kostenallocatie.

¹) Leontiev W. W.: „The structure of the American Economy, 1919-1939”, Oxford University Press, 1951.

²) zie: bibliografie. Toepassingen van I.O.-analyse zijn o.a. bekend bij Western Electric Company, U.S.A., de Nederlandse Staatsmijnen, en Bell Telephone Manufacturing Company, België. In dit laatste geval gaat het om een toepassing op de kostenverbijzondering.

³) Y. Ijiri verduidelijkt het onderscheid tussen I.O.-modellen in inputcoëfficiënten en deze in outputcoëfficiënten door beide parallel op te lossen en te vergelijken. „An application of input-output analysis to some problems in cost accounting”, Management Science, April, 1968, pp. 49-57.

Het is mogelijk beide toepassingen uniform te formuleren in inputcoëfficiënten waarbij enerzijds op een wiskundige wijze het verband wordt aange- toond tussen het input-outputmodel in fysische termen en het input-output- model in monetaire termen, en waarbij anderzijds de dualiteit tussen pro- duktiefunctie en kostenfunctie in het daglicht wordt gesteld. Hierbij wordt uitgegaan van de vaststelling dat de inputcoëfficiëntenmatrix in deze analyse de weergave is van een complexe produktiefunctie van de onderneming. Kostenallocatie kan direct gebeuren aan de hand van de produktierelaties weergegeven door deze matrix zodat geen toevlucht dient gezocht tot alter- native verdeelsleutels⁴).

De opzet van deze bijdrage is in een eerste gedeelte hogergenoemde ver- banden aan te tonen en een verduidelijking te brengen van de consequenties ervan. In een tweede deel worden de gebruikte matrices geïnterpreteerd wat ons in staat zal stellen een multiplicatorwerking aan te tonen.

Een rekapitulatie: mathematische formulering van het I.O.-model

Voor het formuleren van het input-outputmodel wordt uitgegaan van een transactiematrix van de vorm afgebeeld in figuur 1.

		INPUT						
	naar	1	2	3	-----	n		
	van	E_{11}	E_{12}	E_{13}	-----	E_{1n}	V_1	Q_1
1								
2		E_{21}	E_{22}	E_{23}	-----		V_2	Q_2
3		E_{31}	E_{32}	E_{33}	-----		V_3	Q_3
		.	.	.			.	.
		.	.	.			.	.
		.	.	.			.	.
n		E_{n1}	E_{n2}	E_{n3}	-----	E_{nn}	V_n	Q_n
OUTPUT		F_{11}	F_{12}	F_{13}	-----	F_{1n}	0	q_1
		F_{21}	F_{22}	F_{23}	-----	F_{2n}	0	q_2
		.	.	.		.	.	.
		.	.	.		.	.	.
		F_{m1}	F_{m2}	F_{m3}	-----	F_{mn}	0	q_m

figuur 1

⁴) In deze bijdrage wordt niet ingegaan op het probleem van het schatten van deze produktie- relaties en bijgevolg van de input-coëfficiënten. Dit is een econometrisch probleem waarbij nog heel wat empirisch onderzoek kan geschieden.

Hierin stellen voor:

E_{ij} : de transacties in fysische eenheden van afdeling i aan afdeling j

V_i : de transacties van iedere afdeling i aan de finale vraag of aan de voorraden eindprodukten

Q_i : de totale kwantiteiten geproduceerd door afdeling i in de geëigende eenheden

F_{ij} : de hoeveelheden primaire inputs van soort i die van buiten de onderneming worden geleverd aan afdeling j.

q_i : het totaal aan primaire inputs van categorie i.

n : aantal afdelingen.

m : aantal categorieën van primaire inputs.

Iedere afdeling produceert slechts één enkel produkt.

De input-coëfficiënten worden bekomen door E_{ij} en F_{ij} per kolom te delen door de overeenkomstige Q_j .

$$e_{ij} = \frac{E_{ij}}{Q_j} \quad f_{ij} = \frac{F_{ij}}{Q_j} \quad (1)$$

Deze geven de inputs weer per eenheid produkt Q_j en bijgevolg de samenstelling van één eenheid produkt j.

$\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{ij} \\ f_{ij} \end{bmatrix}$ noemen we de inputcoëfficiëntenmatrix

In de veronderstelling dat de input-coëfficiënten konstant blijven voor verschillende aktiviteitsniveau's en er geen tussenvorraden worden aangelegd, kunnen volgende stelsels worden afgeleid uit de definities:

$$Q_1 - (E_{11} + E_{12} + \dots + E_{1n}) = V_1$$

$$Q_2 - (E_{21} + E_{22} + \dots + E_{2n}) = V_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$Q_n - (E_{n1} + E_{n2} + \dots + E_{nn}) = V_n \quad (2)$$

$$F_{11} + F_{12} + \dots + F_{1n} = q_1$$

$$F_{21} + F_{22} + \dots + F_{2n} = q_2$$

$$\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}$$

$$F_{m1} + F_{m2} + \dots + F_{mn} = q_m \quad (3)$$

en gezien (1)

$$Q_i - \sum_j e_{ij} Q_j = V_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_j f_{ij} Q_j = q_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, m \quad (5)$$

Stelsel (4) is een homogeen lineair stelsel in Q_i . In matrixnotatie kunnen we nu (4) en (5) schrijven als

$$[I - E] [Q] = [V] \quad (6)$$

$$[F] [Q] = [q] \quad (7)$$

Deze stelsels van vergelijkingen kenmerken volledig de produktiestructuur van de onderneming en zijn alsdusdanig stelsels van produktiefuncties die de fysische samenstelling in primaire en intermediaire inputs van ieder produkt van de onderneming kenmerken. De goederenstromen in de bedrijfshuishouding worden weergegeven door de transactiematrix uit figuur 1. De aldus geformuleerde relaties maken het mogelijk over te gaan tot planning, niet alleen van de produktiequota in iedere afdeling bij verschillende vraag-niveau's, maar tevens van de daarbij behorende primaire inputs van iedere categorie. Hiervoor vermenigvuldigen we vergelijking (6) met de inverse van de vierkante matrix $[I - E]$.

$$[I - E]^{-1} [I - E] [Q] = [I - E]^{-1} [V]$$

of

$$[Q] = [I - E]^{-1} [V] \quad (8)$$

wat de vektor van de produktiehoeveelheden is voor iedere vektor van de eindvraag $[V]$. De hierbij benodigde primaire inputs worden berekend via vergelijking (7).

Een transactiematrix in monetaire termen: de kostenberekening

In plaats van over te gaan naar een aparte kostencalculatie volgens de produktie-centra methode, d.i. een I.O.-model in outputcoëfficiënten waarbij gebruik gemaakt wordt van verdeelsleutels als outputcoëfficiënten, kan de kostenverbijzondering nu gebaseerd worden op hoger geschetste I.O.-model in inputcoëfficiënten.

De relatie tussen de transactiematrix in fysische termen van figuur 1 en deze in monetaire termen wordt gelegd via twee vectoren.

$$[K] = [K_1 \cdot K_2 \ K_3 \ \dots \ K_n] \quad [P] = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_m]$$

K_i zijn de kostprijzen per eenheid der n produkten, p_i de aanschafprijzen per eenheid van m primaire inputs.

Definiëren we analoog aan figuur 1 de transactiematrix in monetaire termen (figuur 2)

	n kolommen	1 kolom	totaalkolom
n rijen	A_{ij}	Y_i	X_i
m rijen	B_{ij}	0	x_i
totaalrij	T_j	Y	X

figuur 2

Deze wordt afgeleid uit figuur 1 door intermediaire transacties E_{ij} , totale produkties Q_i en finale outputs V_i te waarden aan de kostprijzen K_i van ieder produkt i , terwijl primaire inputs worden gewaardeerd aan aanschafprijzen p_i .

We bekomen volgende definitievergelijkingen

$$\begin{aligned}
 Y_i &= K_i V_i \\
 X_i &= K_i Q_i \\
 A_{ij} &= K_i E_{ij} \\
 B_{ij} &= p_i F_{ij} \\
 x_i &= p_i q_i
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

De kostprijzen K_i zijn die waarden waarvoor geldt dat de totale inputs in geldeenheden gelijk zijn aan de totale outputs in geldeenheden:

$$\sum x_i = \sum y_i \quad (X = Y)$$

of in matrixnotatie

$$[p] [q] = [K] [V]$$

en gezien (7) en (8)

$$[p] [F] [Q] = [K] [I - E]^{-1} [Q]$$

of

$$\begin{aligned}
 [p] [F] [I - E] &= [K] [I - E]^{-1} [I - E] \\
 [K] &= [p] [F] [I - E]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Deze vergelijking drukt de kostprijzen uit in functie van de prijzen van de primaire inputs. Tussen de produktiefuncties en de kostenfuncties bestaat bij konstante inputcoëfficiëntenmatrix $\left[\frac{E}{F} \right]$ een éénéénduidige relatie.

De kostenverbijzondering wordt dadelijk gegeven door de transactiematrix in monetaire termen $\left[\frac{A_{ij}}{B_{ij}} \right]$. A_{ij} is het kostenbedrag dat afdeling i uitbelast aan afdeling j . De eigen indirecte kosten van kostensoort i in afdeling j zijn de bedragen B_{ij} . De totale indirecte kosten van afdeling J bekomen we dus als T.I.K._j = $\sum_i B_{ij}$

Het I.O.-model in monetaire termen

Vertrekkende van de transactiematrix in monetaire termen kunnen op een analoge wijze volgende vergelijkingen worden afgeleid⁵).

$$X_1 - (A_{11} + A_{12} + \dots A_{1n}) = Y_1$$

$$X_2 - (A_{21} + A_{22} + \dots A_{2n}) = Y_2$$

$$X_n - (A_{n1} + A_{n2} + \dots A_{nn}) = Y_n \quad (11)$$

$$B_{11} + B_{12} + \dots B_{1n} = x_1$$

$$B_{21} + B_{22} + \dots B_{2n} = x_2$$

$$B_{m1} + B_{m2} + \dots B_{mn} = x_m \quad (12)$$

Definiëren we opnieuw de inputcoëfficiënten:

$$a_{ij} = \frac{A_{ij}}{X_i} \quad b_{ij} = \frac{B_{ij}}{X_i} \quad (13)$$

$X_i = T_j$; voor $i = j$ zijn de rijtotalen respectievelijk kolomtotalen

Noemen we $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{bmatrix}$ de inputcoëfficiënten-matrix. Gezien nu per afdeling geldt dat de input in monetaire termen gelijk is aan de output in monetaire termen kunnen we schrijven:

$$\sum_i a_{ij} + \sum_i b_{ij} = 1.$$

De stelsels (11) en (12) worden dan:

$$X_i - \sum_j a_{ij} X_j = Y_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\sum_j b_{ij} X_j = x_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, m \quad (15)$$

of in matrixnotatie

$$[I - A] [X] = [Y]$$

$$\text{hetzij} \quad [X] = [Y] [I - A]^{-1} \quad (16)$$

$$\text{en} \quad [x] = [B] [X] \quad (17)$$

Onderzoeken we de relatie tussen inputcoëfficiënten e_{ij} in fysische termen en inputcoëfficiënten a_{ij} in monetaire termen.

⁵) Niettegenstaande deze berekeningen overbodig zijn voor de te voltrekken analyse, geven we volledigheidshalve de betreffende vergelijkingen.

Uit vgl. (1) en (13) volgt:

$$e_{ij} Q_j = E_{ij}$$

$$a_{ij} X_j = A_{ij}$$

en daar volgens (9) $E_{ij} K_i = A_{ij}$

$$e_{ij} Q_j K_i = a_{ij} X_j$$

eveneens volgens (9) $Q_j = \frac{X_j}{K_j}$

$$e_{ij} \frac{X_j}{K_j} K_i = a_{ij} X_j \quad (18)$$

$$e_{ij} \frac{K_i}{K_j} = a_{ij}$$

Een multiplicatorwerking

De matrixvoorstelling van het I.O.-model biedt belangrijke voordelen. Vooreerst dient opgemerkt dat voor het aanwenden van het model als planningsinstrument het volstaat de inverse matrix $[I - E]^{-1}$ slechts éénmaal te berekenen voor verschillende waarden van de overige variabelen waarvan men de impact wenst te onderzoeken, daar waar bij de formulering in gewone wiskundige vergelijkingen men herhaaldelijk moet overgaan tot het oplossen van een uitgebreid lineair stelsel van vergelijkingen volgens de substitutiemethode. Bij toepassingen in grote bedrijven kan het hier gaan om verschillende honderden vergelijkingen. De matrixinversie maakt dan ook het grootste gedeelte uit van de bewerkingen. Voor deze inversie zijn echter computerprogramma's voorhanden.

Een ander voordeel betreft het inbrengen van gegevens indien het model op computer is geprogrammeerd. De matrixvoorstelling geeft de gegevens op een ordentelijke wijze weer in rijen en kolommen zodat de invoer in de computer kan geschieden kolom voor kolom of rij voor rij. Dit vergemakkelijkt alleszins de bestandsorganisatie.

Een laatste doch niet het minst belangrijk voordeel van de matrixvoorstelling is de interpretatie die men kan vasthechten aan de elementen van de inverse matrix $[I - E]^{-1}$. Noemen we deze e_{ij} . Daar $[Q] = [I - E]^{-1} [V]$ de weergave is van een homogeen lineair stelsel in V_i , volgt daaruit dat $[\Delta Q] = [I - E]^{-1} [\Delta V]$. De waarden e_{ij} hierin kan men interpreteren als de benodigde toename van produktie Q_i in afdeling i wanneer de eindvraag naar produkt j met één eenheid toeneemt ($\Delta V_j = 1$).

Alle coëfficiënten e_{ij} zijn dus groter dan nul (dit volgt ook uit $e_{ij} \geq 0$). Het produktieniveau van meerdere afdelingen wordt beïnvloed door een stijging in één enkele eindvraag. De kwantiteiten die elke afdeling moet voortbrengen is groter dan de eindvraag naar de produktie van deze afdeling. Dit verschijnsel wordt het multiplicatoreffekt genoemd en de interdependentie tussen de verschillende afdelingen waarbij outputs van bepaalde afdelingen ook inputs zijn in andere afdelingen ligt hieraan ten grondslag. De coëfficiënt e_{ij}

heten we de aktiviteitsmultiplicator van afdeling i bij een stijging van de vraag naar eindprodukt j . Hij is samengesteld uit een autonoom verschijnsel en een geïnduceerd verschijnsel.

Beschouwen we een vektor die de stijging weergeeft van de vraag naar de eindprodukten $[\Delta V]$. Deze stijging van de vraag heeft als gevolg dat afdeling i minstens ΔV_i meer moet produceren. Hier doet zich echter een geïnduceerd verschijnsel voor in alle afdelingen, dat weergegeven wordt door $[E] [\Delta V]$. Dit zijn de direkte inputs van alle afdelingen die benodigd zijn opdat afdeling i zijn produktie voor de eindvraag zou kunnen voortbrengen.

Om de direkte inputs voort te brengen zijn er op hun beurt indirecte inputs nodig. Dit geïnduceerd effect van de eerste ronde bedraagt:

$$[E]^2 [\Delta V] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n e_{1i} e_{i1} & \sum_{i=1}^n e_{1i} e_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n e_{1i} e_{in} \\ \sum_{i=1}^n e_{2i} e_{i1} & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n e_{ni} e_{i1} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^n e_{ni} e_{in} \end{bmatrix} \cdot [\Delta V]$$

Nemen we de direkte inputs van alle afdelingen, benodigd voor de output van één eenheid eindprodukt j . Deze worden weergegeven door kolom j van $[E]$. Rij i van $[E]$ geeft weer hoeveel eenheden afdeling i moet voortbrengen per eenheid output van afdeling j die als direkte input wordt aangewend. Het produkt van deze rijen en kolommen geeft elementen $[E]^2 [\Delta V]$ voor $\Delta V = 1$. Dit zijn de indirecte inputs per eenheid eindprodukt van afdeling i .

Deze indirecte inputs van de eerste ronde hebben weer op hun beurt een geïnduceerd effect, dat we indirecte inputs van de tweede ronde noemen, enz.

Het totaal effect kunnen we weergeven door een oneindige meetkundige reeks:

$$\begin{aligned} [\Delta Q] &= [\Delta V] + [E] [\Delta V] + [E]^2 [\Delta V] + [E]^3 [\Delta V] + \dots \\ &= \{ I + [E] + [E]^2 + [E]^3 + \dots \} [\Delta V] \end{aligned}$$

$I + [E] + [E]^2 + \dots$ is nu een Mac Laurin reeksontwikkeling van $[I - E]^{-1}$

$$[\Delta Q] = [I - E]^{-1} [\Delta V]$$

en voor $\Delta V_j = 1$

$$\Delta Q_i = e_{ij}^* \quad \text{Dit zijn activiteitsmultiplicatoren.}$$

Samenvatting

Input-outputanalyse is zeer bruikbaar als analyseinstrument in bedrijfs-situaties met complexe interdependente productieprocessen. Naargelang de aard van toepassing wordt gebruik gemaakt van verschillende formuleringen van dit model. Deze formuleringen zijn echter alle te herleiden tot één input-outputmodel gebaseerd op inputcoëfficiënten en uitgedrukt in fysische termen. Het vertrekpunt hierbij zijn twee onafhankelijke stelsels van lineaire produktiefuncties waarin de parameters de fysische inputcoëfficiënten e_{ij} en f_{ij} zijn. Het eerste van deze stelsels is tevens homogeen in de produktievolumes van alle afdelingen.

Voor toepassingen in kostenproblemen kan op wiskundige wijze de overgang aangetoond worden van het fysische model naar het monetaire model. Men maakt hiervoor gebruik van een vektor van aanschafprijzen van primaire inputs $[p]$. Kostprijzen van intermediaire en finale produkten worden direkt afgeleid van deze vektor. Dit illustreert de overgang van produktiefuncties naar kostenfuncties. De kostenverdeling gebeurt aan de hand van reële inputcoëfficiënten uit de produktiefuncties waarbij de kostenverdeelstaat wordt weergegeven door de transactiematrix in geldtermen.

De matrixformulering biedt een zeer vlugge en efficiënte oplossingsmethode volgens de matrixinversie. De elementen van de inverse matrix $[I - E]^{-1}$ vormen bovendien een uitdrukking van het multiplicatoreffekt tengevolge van de wederzijdse leveranties tussen afdelingen. De totale produktie van de n produkten zal groter zijn dan de totale eindvraag naar ieder van deze n produkten. e_{ij}^* is de aktiviteitsmultiplicator van afdeling i ten opzichte van de vraag naar produkt j . Deze geeft weer hoeveel afdeling i moet bijproduceren van haar produkt, indien de eindvraag naar produkt j met één eenheid stijgt.

Bibliografie

- Brauers, W. K., *Input-outputanalyse en Internationale Economische Integratie*. Standaard Wetenschappelijke Uitgeverij, Antwerpen, 1968.
- Butterworth, J. E., Sigloch, B. A., *A Generalized Multi-Stage Input-Output Model and Some Derived Equivalent Systems*. The Accounting Review, Oktober 1973, pp. 700-716.
- Churchil, N., *Linear Algebra and Cost Allocations: Some Examples*. The Accounting Review, Oktober 1964, pp. 894-904.
- Farg, S. M., *A Planning Model for the Divisionalized Enterprise*. The Accounting Review, April 1968, pp. 312-320.
- Feltham, G. A., *Some Quantitative Approaches to Planning for Multiproduct Production Systems*. The Accounting Review, January 1970, pp. 11-26.
- Grypdonck, A., *Kostenverbijzondering bij wederkerig verband tussen de kostencentra*. Maandblad voor Bedrijfsadministratie en Organisatie, 1968.
- Ijiri, Y., *An Application of Input-Output Analysis to Some Problems in Cost Accounting*. Management Accounting, April 1968, pp. 49-57.
- Kaplan, R. S., *Variable and Self-Service Costs in Reciprocal Allocation Models*. The Accounting Review, Oktober 1973, pp. 738-748.
- Leontiev, W. W., *The Structure of the American Economy, 1919-1939*. Oxford University Press, 1951.
- Livingstone, J. L., *Input-Output Analysis for Cost Accounting, Planning and Control*. The Accounting Review, January 1969, pp. 48-64.
- Livingstone, J. L., *Matrix Algebra and Cost Allocations*. The Accounting Review, July 1968, pp. 503-508.
- Manes, R. P., *Comment on Matrix Theory and Cost Allocations*. The Accounting Review, July 1965, pp. 640-643.
- Minch, R., Petri, E., *Matrix Models of Reciprocal Service Cost Allocation*. The Accounting Review, July 1972, pp. 576-580.
- Van Straelen, R. A., Virenque, P. H., *De input-output analyse*. Leuven 1961.
- Verheyen, P. A., *De Input-output-analyse binnen de onderneming*. Gepubliceerde rede; Heerlen, 1965.