

# Toedeling van de controletolerantie bij de accountantscontrole

Prof. J.H. Blokdijk

## 1 Probleemstelling

Voor het nemen van bepaalde beslissingen in zijn relatie tot een onderneming pleegt menig een gebruiker te maken van de jaarrekening van die onderneming. Dat is ook de belangrijkste ontstaansgrond van het accountantsberoep; immers, de gebruiker van een jaarrekening dient er dan van uit te kunnen gaan dat deze betrouwbare informatie geeft. Voor zijn doel is het echter vrijwel nooit noodzakelijk dat die informatie op alle punten absoluut nauwkeurig is: bij veel door derden, zoals beleggingsanalisten, uit de jaarrekening afgeleide informatie, zoals kengetallen en groei-percentages, worden afrondingen toegepast, die in het maatschappelijk verkeer kennelijk niet als hinderlijk worden ervaren.

De kernfunctie van het huidige accountantsberoep is het verschaffen van zekerheid omtrent de betrouwbaarheid van financieel-economische informatie, waarin jaarrekeningen een belangrijke plaats innemen. Om die zekerheid te kunnen verschaffen, behoeft de accountant dus niet na te gaan of de informatie absoluut nauwkeurig is; voorzover posten (zoals de omvang van het aandelenkapitaal) hiervan zijn uitgezonderd, spelen zij in het navolgende betoog geen enkele rol en blijven zij daarom dus buiten beschouwing.

Anderzijds moet de informatie natuurlijk wel een 'zekere' mate van nauwkeurigheid kennen, en wel een zodanige mate dat de gebruiker niet tot een andere beslissing zou komen dan in het geval dat hij wel over absoluut nauwkeurige informatie zou beschikken. Daartoe is in de theorie van de accountantscontrole het begrip 'materieel belang' geïntroduceerd; dit wordt door accountants in het algemeen aangeduid als 'materialiteit'.

Het begrip 'materieel belang in relatie tot de verantwoording' wordt in ontwerp-Richtlijn voor de Accountantscontrole 3.02 als volgt omschreven: *'De (mogelijke) afwijking van een post of een som van posten in een verantwoording is van materieel belang indien kennisneming daarvan voor de oordeelsvorming van gebruikers van de verantwoording noodzakelijk is.'* (NIVRA, 1991, § 2).

Voorts is algemeen aanvaard dat de afweging van maatschappelijk nut en maatschappelijke kosten ertoe leidt, dat de accountantscontrole zo kan worden uitgevoerd dat een geringe mate van onzekerheid over de juistheid van zijn conclusie overblijft (zie NIVRA, 1982, p. 35 en NIVRA, 1993, § 5.2). Dit leidt ertoe dat de accountant deelwaarnemingen, zoals statistische steekproeven, kan toepassen.

De controle van jaarrekeningen heeft hiernaast vele niet-kwantitatieve facetten, die in dit artikel buiten beschouwing blijven.

Bij de aanvang van zijn controle kan de accountant in het algemeen nog niet goed overzien welke mate van nauwkeurigheid de gebruiker redelijkerwijze van een jaarrekening kan verlangen, omdat die jaarrekening nog niet opgesteld is, of zelfs kan zijn; het desbetreffende jaar is meestal bij de aanvang van de controle nog niet verstre-

Prof. J.H. Blokdijk is directeur van J.H. Blokdijk Advies B.V. en adviseur van ondernemingen en accountants. Daarnaast is hij hoogleraar Toegepaste Accountantscontrole aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Hij heeft vele vaktechnische functies bij het Koninklijk NIVRA vervuld en is lid van het bestuur van de Stichting Toezicht Effectenverkeer.

ken. Om toch een plan voor zijn controle te kunnen maken, stelt de accountant een 'controletolerantie' vast, een bedrag dat hij baseert op het 'materieel belang' zoals hij dat meent te kunnen verwachten, en waarbij hij een zekere mate van voorzichtigheid in acht pleegt te nemen: de controletolerantie zal in het algemeen lager zijn dan het 'materieel belang' in de jaarrekening over het voorgaande jaar. Op de wijze van vaststelling van het 'materieel belang' en van de controletolerantie wordt niet ingegaan; in dit artikel wordt deze beschouwd als een exogeen gegeven.

Benadrukt wordt dat het vaststellen van de controletolerantie een belangrijk element is in de *planning* van de controle; het gaat hier om de vraag: 'welke totale onvolkomenheid wenst de accountant ten minste te ontdekken?'. Eerst bij de *evaluatie* van de controlebevindingen rijst de vraag: 'kan de accountant de ontdekte onvolkomenheden zonder correctie *accepteren*, en dus desondanks een goedkeurende verklaring geven?'. Deze laatste vraag is in dit artikel niet aan de orde.

Evenmin ter discussie staat thans de vraag welk risico de accountant kan nemen om onvolkomenheden van materieel belang niet te ontdekken. Dit is een andere belangrijke vraag die bij de *planning* van de controle beantwoord moet worden, en die óók bepalend is voor de kwaliteit van de controle. Aan deze vraag heb ik eerder in dit blad een beschouwing mogen wijden (Blokdijs, 1993), waaraan ik enkele malen zal refereren wegens de samenhang met het onderhavige onderwerp.

Bij de *planning* van zijn controle dient de accountant het volgende vraagstuk op te lossen. Vrijwel iedere jaarrekening omvat een groot aantal (jaarrekening)posten, bijvoorbeeld voorraden, schulden, kosten. Die moet de accountant om een aantal redenen afzonderlijk controleren: omdat zij afzonderlijk in de jaarrekening vóórkomen, omdat verschillende posten met behulp van verschillende technieken worden gecontroleerd, en ten slotte om zijn controle doelmatig te kunnen organiseren.

Het probleem is nu: hoe dient de controletolerantie bij de controle van de afzonderlijke jaarrekeningposten te worden toegepast?

Eerst zal ik pogen deze vraag te beantwoorden voor het geval dat de in aanmerking komende jaarrekeningposten worden onderzocht met behulp

van statistische steekproeven, omdat daarbij de consequenties van de gekozen oplossingen kwantitatief zichtbaar kunnen worden gemaakt. Vervolgens zal ik kort ingaan op de relatie met de controlekosten; een procedure waarbij hiermee bij de vaststelling van de omvang van een statistische steekproef rekening wordt gehouden, heb ik in 1993 in dit blad uitgebreid mogen voorstellen (Blokdijs, 1993). Voorts zal ik enige bezwaren bespreken tegen een andere in de literatuur genoemde procedure ter oplossing van het gestelde probleem, de zogenaamde 'wortelformule'. Ten slotte zal ik een aanvullend voorstel doen voor het geval dat bij de accountantscontrole (mede) niet-statistische deelwaarnemingen worden toegepast.

## 2 Huidige oplossingen

De vraag hoe de controletolerantie bij de controle van afzonderlijke jaarrekeningposten wordt toegepast, wordt in de praktijk natuurlijk reeds lang beantwoord, anders zouden accountants niet kunnen werken. Het is mij uit gesprekken bekend dat de methoden die door verschillende samenwerkingsverbanden van accountants (accountantsmaatschappen, -vennootschappen en -diensten) hiertoe hanteren, onderling verschillen. Deze methoden worden echter niet gepubliceerd, zodat zij niet onderworpen kunnen worden aan de 'choc des opinions', althans niet buiten bedoelde samenwerkingsverbanden. Voor het beroep als geheel is dit een betreurenswaardige ontwikkeling.

Er is mij slechts één uitzondering bekend: de 'wortel-formule', die ik later in dit artikel zal beschrijven. Deze is in 1983 in de Verenigde Staten gepubliceerd door Zuber, Elliott, Kinney en Leisenring; in Nederland komt deze methode eerst in 1989 in de literatuur naar voren (NIVRA, 1989).

Wel is bekend dat er ten aanzien van het onderhavige vraagstuk drie mogelijke oplossingen zijn die gekenschetst kunnen worden als volgt:

- toedeling van de controletolerantie aan alle in aanmerking komende posten, zodat de som van de deeltoleranties gelijk is aan de controletolerantie;
- berekening van een deeltolerantie per post zonder dat de som van de deeltoleranties gelijk hoeft te zijn aan de controletolerantie;
- toepassing van de controletolerantie op de afzonderlijke posten.

Deze laatste oplossing komt dus neer op het *niet* toedelen van de controletolerantie. Deze oplossing wordt voor toepassing van statistische steekproeven genoemd door Leslie, Teitlebaum en Andersen (1979, pp. 131-132), Zuber, Elliott, Kinney en Leisenring (1983, p. 53) en Gafford en Carmichael (oktober 1984, p. 118), echter (vrijwel) zonder enige argumentatie; deze auteurs vermijden het vraagstuk of geven andere oplossingen.

Merkwaardig is echter de volgende ontwikkeling. In een in 1988 verschenen bundel, getiteld 'Research Opportunities in Auditing' wordt in één van de artikelen door Akresh, Loebbecke en Scott het onderhavige vraagstuk genoemd zonder dat melding gemaakt wordt van één der eerdergenoemde publicaties. De indruk wordt gewekt dat hier een onopgelost vraagstuk ligt.

Zelf ben ik tot de slotsom gekomen dat toedeling, althans bij toepassing van statistische steekproeven, niet noodzakelijk is. Deze conclusie zal ik nu eerst onderbouwen, waarbij ik ervan uitga dat bij de statistische steekproeven trekking uit waarde-eenheden wordt toegepast, hetgeen in de accountantspraktijk thans zeer gebruikelijk is.

### **3 Toedeling van de controletolerantie bij statistische steekproeven**

Een belangrijk doel bij de controle van een jaarrekening is: vaststellen dat het totaal van de mogelijke fouten in de jaarrekening de totale controletolerantie (althans: de 'materialiteit') niet overschrijdt. Voor dit doel kunnen alle afzonderlijke jaarrekeningposten tezamen als één - grote - populatie beschouwd worden; weliswaar moeten verschillende jaarrekeningposten met verschillende controletechnieken worden onderzocht, maar het doel van al deze onderzoeken is het antwoord op één en dezelfde vraag: bevat de populatie (waarschijnlijk) fouten, en zo ja, hoe groot is dan het (mogelijke) totaal hiervan? Dat dit antwoord op verschillende wijzen wordt verkregen, is voor deze vraagstelling niet relevant.

Voorshands richt ik mijn beschouwing uitsluitend op die jaarrekeningposten die worden onderzocht met behulp van een statistische steekproef waarbij uit waarde-eenheden wordt geselecteerd; deze jaarrekeningposten duid ik hierna aan als 'deelpopulaties', en het geheel hiervan als 'totaalpopulatie'. Op de problematiek van het gebruik van

andere vormen van deelwaarneming dan de statistische steekproef ga ik in § 7 van dit artikel in.

Als men de deelpopulaties tezamen als één totaalpopulatie onderzoekt en bij de vaststelling van de steekproefomvang de controletolerantie hanteert, kan men met de tevoren geëiste betrouwbaarheid de conclusie trekken dat de totale fout in de totaalpopulatie niet groter is dan de controletolerantie, indien het aantal in de steekproef aangetroffen fouten niet groter is dan bij de vaststelling van de steekproefomvang als acceptatiegrens is gekozen. Dit is exact de conclusie die de accountant nastreeft.

In de praktijk is deze procedure niet gemakkelijk uitvoerbaar: omdat de onderzoeken van de verschillende deelpopulaties vaak op verschillende momenten en door verschillende leden van het controleteam moeten worden uitgevoerd, dient de steekproefomvang per deelpopulatie vastgesteld te kunnen worden, waarbij dan uiteraard dezelfde totaalconclusie moet worden nagestreefd.

In het - dus imaginaire - geval dat men de steekproef op de totaalpopulatie uit zou voeren, zou de verdeling van de steekproef over de deelpopulaties ongeveer recht evenredig zijn met de omvang van die deelpopulaties. Daaruit valt de gewenste omvang van de steekproef op de deelpopulatie af te leiden; deze blijkt te worden gevonden door bij de berekening van die steekproefomvang de *totale* controletolerantie in aanmerking te nemen. De bewijsvoering is opgenomen in de Appendix bij dit artikel. De conclusie is dus: toedeling van de controletolerantie is bij toepassing van statistische steekproeven overbodig.

Tevens blijkt uit de bewijsvoering in de Appendix dat het niet noodzakelijk is de omvang van de *totaalpopulatie* te kennen om de omvang van de steekproef op de deelpopulatie te kunnen berekenen, als het *bedrag* van de *totaaltolerantie* eenmaal is vastgesteld.

Tegengeworpen zou kunnen worden dat de accountant, blijkens de aanbevolen tekst van de goedkeurende verklaring bij een jaarrekening niet alleen zekerheid behoort te geven over de 'grootte', maar ook over de 'samenstelling' van 'vermogen en resultaat'. Als echter de grootte van vermogen en resultaat met voldoende zekerheid is vastgesteld, kunnen onvolkomenheden in de samenstelling slechts verschuivingen tussen verschillende posten van de balans resp. het

resultaat betreffen. Indien en voorzover deze onvolkomenheden de totaal tolerantie te boven gaan, worden zij met dezelfde mate van zekerheid ontdekt. Voorts is de tolerantie voor onvolkomenheden in de samenstelling in het algemeen groter dan de tolerantie voor die in de grootte.

De vraag kan rijzen wat de consequenties kunnen zijn van het aantreffen van meer fouten in de deelsteekproeven te zamen dan tevoren als acceptatiegrens is gesteld. Dit betekent dat de mogelijke fout in de totaalpopulatie boven de controletolerantie kan liggen; dan zijn andere, bij voorkeur niet-statistische onderzoeksmethoden nodig om een beter inzicht te krijgen in de mogelijke totale fout (NIVRA 1982, pp. 103-104; Frielink & De Heer 1992, al. 8.1.285). Het ligt dan echter voor de hand dit nader onderzoek, bijvoorbeeld door middel van specifiek gerichte kritische deelwaarnemingen, eerst te richten op de deelpopulatie waarin de meeste fouten zijn aangetroffen.

#### **4 Toch toedelen van de controletolerantie?**

Toedeling van de controletolerantie aan de verschillende te controleren posten in jaarrekeningen of andere verantwoordingen komt in de praktijk voor, zoals mij uit gesprekken en sommige niet-openbare handboeken van samenwerkingsverbanden van accountants is gebleken. In bepaalde gevallen lijkt hiervoor een goede reden te bestaan, zoals bij overheidsverantwoordingen, waar voor afzonderlijke begrotingsartikelen of andere delen van de verantwoording nauwkeurigheidseisen gelden die uitgaan boven de eis voor de verantwoording als geheel. Ook bij jaarrekeningen van ondernemingen kan het gewenst zijn bepaalde posten met een grotere nauwkeurigheid te controleren dan andere, bijvoorbeeld op verzoek van de cliënt of terwille van de controle op de afrekening van een subsidie.

In al deze gevallen wordt dus meer dan één nauwkeurigheidseis gesteld. Het is dan echter in beginsel niet zinvol aan deze verschillende eisen tegemoet te komen door het *toedelen* van de ene controletolerantie die voor de verantwoording als geheel geldt. Indien voor alle onderdelen van de verantwoording zwaardere nauwkeurigheidseisen gelden dan voor de verantwoording als geheel, zal het praktisch zijn om voor elk onderdeel apart een

(deel) tolerantie te bepalen; de controletolerantie voor de verantwoording als geheel wordt dan automatisch gehaald. Indien slechts voor enkele onderdelen zwaardere nauwkeurigheidseisen gelden, zal het vaak praktisch zijn de in de vorige paragraaf bepleite procedure voor alle onderdelen te volgen en aanvullende extra maatregelen te nemen voor de onderdelen waaraan de zwaardere eisen worden gesteld.

Doch ook indien voor onderdelen geen zwaardere eisen gelden lijkt toedeling van de controletolerantie voor te komen. Voorts wordt dan vaak ook voor steekproeven op deelpopulaties uitgegaan van het aanvaardbare 'accountantscontrolesico' dat samenwerkingsverbanden van accountants centraal plegen vast te stellen; dit is het risico dat uiteindelijk ten onrechte uit het onderzoek van de jaarrekening wordt geconcludeerd dat deze geen onvolkomenheid van materieel belang bevat (=  $\beta$ -risico). Het bij afzonderlijke steekproeven te hanteren  $\beta$ -risico wordt dan mede beïnvloed door schattingen die de accountant maakt van het 'inherent risico', het 'interne-controlesico' en het 'cijferanalyserisico', als elementen van de risico-analyse. Over de betekenis van de risico-analyse in dit kader heb ik in een vorig artikel een beschouwing gegeven (Blokdijs 1993), doch daarvan abstraheer ik op dit moment.

De consequentie van vorenomschreven gedragslijn wil ik hierna bespreken aan de hand van een cijfervoorbeeld. Daarbij ga ik ervan uit dat de accountant de laatstgenoemde drie risico's hoog inschat, dus op 100% stelt, hetgeen tot gevolg heeft dat hij bij de bepaling van de steekproefomvang het accountantscontrolesico hanteert.

Stel nu het volgende:

- het accountantscontrolesico is vastgesteld op 5%;
- bij een bepaalde jaarrekeningcontrole heeft de accountant de controletolerantie bepaald op f 50.000;
- er zijn in deze jaarrekening slechts twee posten die met behulp van deelwaarnemingen worden gecontroleerd, te weten:
  - voorraden f 3.000.000, en
  - vorderingen f 2.000.000.

De accountant besluit de controletolerantie rechttevenredig aan genoemde twee posten toe te delen (dus f 30.000 aan de voorraden en f 20.000 aan de vorderingen), en vervolgens de steekproe-



ven uit de voeren, waarbij hij de jaarrekeningposten slechts bij het aantreffen van 0 fouten zal accepteren. Dan wordt de steekproefomvang zowel voor de voorraden als voor de vorderingen 300 stuks.

Indien hij de conclusie uit de vorige paragraaf zou hebben aanvaard en de controletolerantie niet zou hebben toegedeeld, zou de steekproefomvang voor de voorraden 180 stuks en voor de vorderingen 120 stuks zijn geweest. Indien hij daarin geen fouten aantreft, kan hij nog steeds met 5% risico de conclusie trekken dat de totale fout in de twee jaarrekeningposten te zamen niet meer dan f 50.000 bedraagt, hetgeen hij eigenlijk wenst te weten.

Waar zit de denkfout van de eerderbedoelde accountant? Hij heeft nog 5% risico dat er meer dan f 30.000 aan fouten in de voorraden en 5% risico dat er meer dan f 20.000 aan fouten in de vorderingen zit. De kwade kans dat hij in geen van *beide* steekproeven een fout ontdekt is echter *het product* van de twee afzonderlijke kansen, dus 0,25%! Zijn conclusie dat de totale fout in de jaarrekening de controletolerantie niet overschrijdt, heeft hij bereikt met een veel grotere mate van zekerheid dan het samenwerkingsverband van accountants waarvan hij deel uitmaakt, noodzakelijk acht. In wezen heeft hij met 5% risico de conclusie bereikt dat de verantwoording niet meer dan f 30.000 aan fouten bevat.

Rechtevenredige toedeling van toleranties onder gelijktijdige hantering van het vast accountantscontrole risico betekent dus dat men meer doet dan men zelf nodig acht. De in de vorige paragraaf van dit artikel aangedragen oplossing betekent dus winst ten opzichte van de gesignaleerde praktijk. Het zou verstandig kunnen zijn deze winst ten dele te gebruiken door te werken met een totale steekproef die gebaseerd is op een acceptatiegrens van meer dan 0 fouten: dat voorkomt problemen, met name indien de evaluaties van de steekproeven geschieden met gebruik van de zogenaamde 'tainting' methode voor de evaluatie van gedeeltelijk foutieve posten. Dit probleem kan echter ook worden voorkomen door de controletolerantie op een lager bedrag te stellen dan dat van het 'materieel belang'.

Het vorenstaande cijfervoorbeeld zou nog een andere gedachte kunnen doen rijzen, en wel dat een andere dan een rechtevenredige toedeling van toleranties tot een doelmatiger controle zou

kunnen leiden: de som van de afzonderlijke steekproefomvangen zou dan geringer kunnen zijn dan bij het achterwege laten van de toedeling.

Door deze gedragslijn zou men echter de uiteindelijke doelstelling uit het oog verliezen. Indien de steekproefomvang voor één van de deelpopulaties kleiner is dan overeenkomt met de rechtevenredige verdeling, kan voor deze deelpopulatie niet met de vereiste betrouwbaarheid de conclusie worden getrokken dat de totale fout daarin de controletolerantie niet overschrijdt. Dus kan die conclusie dan ook niet voor de jaarrekening als geheel worden getrokken.

In termen van het voorafgaande cijfervoorbeeld: bij een andere dan een rechtevenredige toedeling van toleranties zal in één van beide steekproeven de kans dat een totale fout van f 50.000 onontdekt blijft, groter zijn dan 5%; dat kan uiteraard niet worden gecompenseerd door uit de andere populatie een grotere steekproef te trekken. Er is maar één methode om het op doelmatige wijze goed te doen: de in het voorgaande aanbevolen methode, dit is de totaal tolerantie van f 50.000 hanteren bij de vaststelling van de omvang van beide steekproeven. Toedelen is dus helemaal niet nodig.

## 5 De relatie met de controlekosten

De aan het einde van de vorige paragraaf gesignaleerde onjuiste gedachte van een andere dan een rechtevenredige toedeling kan zijn ingegeven door het kostenaspect: aan sommige controletechnieken zijn per post hogere controlekosten verbonden dan aan andere. Dit is op zich een valide overweging. De oplossing moet echter niet gezocht worden in de controletolerantie, welke in wezen stoelt op een exogeen gegeven: het 'materieel belang' in het licht van het getrouw beeld van vermogen en resultaat. In een vorig artikel heb ik de - ook maatschappelijke - afweging van kosten en baten van de accountantscontrole bepleit, eveneens toegespitst op de deelonderzoeken die het behulp van een statistische steekproef worden uitgevoerd (Blokdijs 1993). Daarin heb ik de controlekosten in relatie gebracht met het risico, niet met de tolerantie. Dit lijkt mij nog steeds correct, omdat niet de controletolerantie, maar het risico verbonden aan de uitvoering van deelwaarnemingen in de accountantscontrole door de controlekosten wordt gerechtvaardigd (NIVRA 1982, p. 35).

In genoemd artikel heb ik een concrete procedure voorgesteld voor de bepaling van het risico en daarmee van de steekproefomvang per deelonderzoek in relatie tot de controlekosten. Deze benadering leidde tot de consequentie dat de risico's bij verschillende deelonderzoeken onderling kunnen verschillen, als gevolg van de uiteenlopende controlekosten. In dat betoog heb ik de tolerantie steeds als een gegeven gehanteerd, zij het dat ik daarover een nadere beschouwing in het uitzicht heb gesteld die het onderwerp van het onderhavige artikel vormt.

De vraag kan rijzen of de thans bepleite hantering van de controletolerantie bij de bepaling van de omvang van steekproeven op deelpopulaties ook in de in 1993 voorgestelde procedure op basis van de afweging van kosten en baten past; immers, in het voorgaande is steeds uitgegaan van een vaststaand risico, gebaseerd op het accountantscontrolerisico.

Ik meen voorshands dat die vraag bevestigend beantwoord kan worden. In het voorgaande betoog heeft de hoogte van het risico geen rol gespeeld; het is aldaar en in de bewijsvoering in de Appendix als constante gehanteerd om onnodige complicaties te vermijden. In § 6 van mijn artikel van 1993 heb ik de vraag gesteld of controle van verschillende deelpopulaties met sterk verschillende steekproefrisico's in het maatschappelijk verkeer aanvaardbaar zou zijn, en heb ik deze vraag bevestigend beantwoord, met argumenten, zij het enigszins tentatief. Een discussie tussen vakgenoten hierover zou mij dus welkom zijn.

## 6 De wortelformule

Zoals eerder gezegd is de wortelformule (Zuber, Elliott, Kinney en Leisenring, 1983) bij mijn weten de enige gepubliceerde methode voor het bepalen van de tolerantie voor de controle van een afzonderlijke jaarrekeningpost. Deze deeltolerantie wordt bepaald door de controletolerantie te vermenigvuldigen met de wortel van het quotiënt van het totaalbedrag van de deelpopulatie en het bedrag van de grootte die als basis voor de vaststelling van de controletolerantie heeft gediend. Laatstbedoelde grootte is soms de laagste van omzet en balanstelling (Elliott, 1983), soms de som van baten en lasten (Van Barneveld en Van Densen, 1990).

Als het worteltrekken achterwege zou blijven, zou in wezen sprake zijn van rechtevenredige

toedeling van de controletolerantie, zij het tevens aan jaarrekeningposten die niet met behulp van een statistische steekproef worden gecontroleerd. Door het worteltrekken wordt de tolerantie per jaarrekeningpost groter dan uit rechtevenredige toedeling zou volgen; immers, het quotiënt is een breuk tussen 0 en 1, en door worteltrekken wordt die breuk groter. Het totaal van de deeltoleranties zal dus hoger zijn dan de controletolerantie. Dat betekent dat de controle zodanig wordt opgezet dat geen conclusie over het al dan niet overschrijden van de controletolerantie kan worden bereikt, zodat men in wezen te weinig doet.

Anderzijds pleegt men ook voor de controle van een deelpopulatie uit te gaan van het accountantscontrolerisico. Daarbij wordt dan risico-analyse toegepast, zodat het steekproefrisico in vele gevallen hoger zal liggen. In beginsel maakt dit geen verschil: als men in de kwantitatieve vorm van risico-analyse gelooft - hetgeen niet ieder is gegeven - dan vervangt men steekproeftrekkingen door andere werkzaamheden, doch men gaat per deelonderzoek in wezen uit van het accountantscontrolerisico. In § 4 meen ik te hebben aangetoond dat daarbij een denkfout wordt gemaakt, en dat men op basis daarvan in het algemeen te veel doet.

Bij toepassing van de wortelformule kan men dus enerzijds te weinig, anderzijds te veel doen. In beginsel compenseren deze tendenties elkaar, maar of het saldo te veel, te weinig of juist goed is, pleegt uiteraard niet te worden vastgesteld. Daarom is de wortelformule een gebrekkige, zoal niet ondeugdelijke methode.

De wortelformule lijkt te zijn gegrondvest op de theorie van de normale verdeling, waarbij de kansen aan beide zijden van een gemiddelde symmetrisch verdeeld en dus gelijk zijn. Voor de accountantscontrole zou dit betekenen dat bij een bepaalde (steekproefsgewijze uitgevoerde) controlemaatregel gelijke kansen bestaan op de ontdekking van onjuistheid en op de ontdekking van onvolledigheid. Dit geldt voor vrijwel geen enkele controlemaatregel. Ook de bij accountantscontrole gebruikelijke selectie rechtvaardigt die veronderstelling niet: bij een controle op juistheid hebben onvolledig verantwoorde elementen een geringere kans op trekking dan onjuist verantwoorde elementen. Daarom wordt in de accountantscontrole veelal de Poissonverdeling gebruikt; deze richt zich slechts op één kant van de kansen.

Van belang is voorts dat de wortelformule in wezen is ontleend aan de wiskundige formule voor de combinatie van standaarddeviaties; een standaarddeviatie is echter iets anders dan een bovengrens voor een totale fout.

Overigens hebben Zuber cs., zoals eerder gemeld, aan het einde van hun artikel zelf aangegeven dat het achterwege laten van de toedeling van de controletolerantie bij op waarde-eenheden gerichte steekproeven een gezonde procedure is.

## 7 Andere deelwaarnemingen dan de statistische steekproef

In de risico-analyse wordt het risico dat de accountant bestaande fouten niet ontdekt, onderscheiden in het cijferanalyserisico en het steekproefrisico (NIVRA 1992, § 4.3). Hieruit kan worden geconcludeerd dat men daar waar men risico-analyse toepast, controleert met behulp van cijferanalyse en/of steekproeven.

Het kenmerk van statistische steekproeven is dat men de te onderzoeken elementen 'at random', lukraak, *ongericht*, kiest. Bij cijferanalyse gaat men uit van cijferbeoordeling, die *richting*gevend is voor de controle: men kijkt welke jaarrekening-posten of onderdelen daarvan afwijken van hetgeen men meende te kunnen verwachten en zoekt vervolgens naar de oorzaken. Dit is dus geen lukrake, maar een *gerichte* selectie; deze procedure staat bekend als 'kritische steekproef' (NIVRA 1982, p. 54). Deze twee onderzoeksmethoden onderscheiden zich dus door de wijze van selectie, en dat acht ik uiterst zinvol. Dit betekent dat ik cijferanalyse zie als: cijferbeoordeling plus kritische steekproef. Ik acht dit het krachtigste verificatie-instrument dat de accountant tot zijn beschikking heeft; helaas is het niet altijd effectief en/of efficiënt, bijvoorbeeld bij zeer grote populaties.

Te betreuren is evenwel dat Richtlijn voor de Accountantscontrole 4.04 de cijferanalyse definieert als: 'de toepassing van cijferbeoordeling, (totaal)verbandscontrole en toetsing aan normatieve gegevens' (NIVRA 1992, § 2.5). Bij totaalcontroles speelt risico-analyse nauwelijks een rol: dit is in het algemeen de minst tijdrovende vorm van controle. Verbandscontrole kan zowel in totalen als in detail plaatsvinden; dit laatste geschiedt dan meestal steekproefsgewijs. Toetsing aan normatieve gegevens tenslotte is een vorm van cijferbeoordeling of van verbandscontrole. Juist in het kader

van de risico-analyse is de geciteerde definitie dus slecht gekozen. Dit zal wel een offer op het altaar van de internationale harmonisatie zijn, omdat men in het buitenland het begrip 'verbandscontrole' niet kent, althans verbandscontrole niet onderscheidt van cijferbeoordeling.

Ook bij de kritische steekproef heeft de accountant behoefte aan een tolerantie, om te weten hoe ver hij bij het onderzoek van (een onderdeel van) een jaarrekeningpost dient te gaan. In het kader van het onderhavige onderwerp ontstaat dan een probleem: de controletolerantie is dan voor dit doel onbruikbaar, omdat deze betrekking heeft op de gehele jaarrekening en dus veelal een veel te groot bedrag belichaamt om als leidraad te kunnen dienen bij het gerichte onderzoek van (een onderdeel van) een jaarrekeningpost. Men zal dan al snel tot de conclusie komen dat een fout van een dergelijke omvang niet in die post kan voorkomen. Daarbij houdt men geen rekening met het feit dat de wel bestaande fouten te zamen met fouten in andere (onderdelen van) jaarrekeningposten wel degelijk boven de controletolerantie uit kunnen stijgen; bij de statistische steekproef houdt men hier als het ware automatisch rekening mee. Het probleem wortelt in de beperkingen van het menselijk denken: bij gericht zoeken in een bepaalde populatie kan men onmogelijk alle mogelijke fouten in alle mogelijke andere populaties in gedachten houden. Bij de kritische steekproef is dus een kleinere tolerantie nodig, een 'deeltolerantie'.

Nu is het theoretisch denkbaar eerst de deeltoleranties voor met behulp van kritische steekproeven te onderzoeken posten uit de controletolerantie af te zonderen en het restant voor alle statistische steekproeven te zamen te hanteren. Dit lijkt mij geen goede gedachte: dit is in wezen het toedelen van de controletolerantie, waarbij de aldaar vaak gemaakte denkfout onwillekeurig en onnaspeurbaar ook bij de kritische steekproeven zal opdruken. Een betere oplossing lijkt mij de deeltolerantie bij de kritische steekproef zodanig te bepalen dat de kritische steekproef als equivalent van een statistische steekproef op dezelfde jaarrekeningpost kan gelden.

Bij het in dit artikel voorgestelde stelsel ter bepaling van de omvang van steekproeven op deelpopulaties is de bepaling van deeltoleranties echter niet mogelijk. Het meest voor de hand liggende alternatief is dan toch een methode die

lijkt op het toedelen van toleranties, en wel de volgende:

- men dele de controletolerantie door het benaderde totaalbedrag van alle populaties die met behulp van kritische en/of statistische steekproeven zullen worden onderzocht;
- men berekene vervolgens de deeltolerantie door het gevonden percentage toe te passen op het totaalbedrag van de deelpopulatie die met behulp van de kritische steekproef wordt onderzocht.

Om nu een oordeel te krijgen over de vraag wanneer de kritische steekproef equivalent is met een statistische, kan het gewenste risico van een - dus hypothetische - statistische steekproef bij de aangenomen deeltolerantie worden bepaald. Deze wordt gevonden door het bij de hypothetische statistische steekproef te hanteren risico te verheffen in de macht van het quotiënt van de deeltolerantie en de controletolerantie. De bewijsvoering is opgenomen in de Appendix.

Een cijfervoorbeeld zal verhelderend kunnen werken. Daarbij ga ik uit van het cijfervoorbeeld in § 4 van dit artikel. Stel dat de accountant besluit de vorderingen ad f 2.000.000 niet met behulp van een statistische, maar van een kritische steekproef te onderzoeken: wat is dan een equivalente procedure?

De deeltolerantie wordt dan als volgt bepaald:  
$$[2.000.000 / (3.000.000 + 2.000.000)] * f 50.000 = f 20.000.$$
 Het toelaatbare risico dat ten onrechte wordt geconcludeerd dat de totale fout in de vorderingen niet meer bedraagt dan f 20.000 is dan het accountantscontrolerisico van 5%, of 0,05, verheven in de macht  $20.000/50.000$ , ofwel 0,4 (zie Appendix, § 5). De uitkomst hiervan is 0,301; bedoeld risico is dus 30,1%.

De accountant moet zich dus afvragen of zijn kritische steekproef zo 'goed' is dat hij niet meer dan 30% kans op een onjuiste conclusie heeft. Dit is uiteraard een zaak van vakkundig oordeel; kwantitatieve methoden staan hem hiertoe niet ter beschikking.

Dat met deze procedure de in § 4 gesignaleerde denkfout wordt vermeden, moge blijken indien ook de voorraden in het cijfervoorbeeld van § 4 op de bovenomschreven wijze zouden worden onderzocht. De deeltolerantie zou daarvoor f 30.000 bedragen, en het toelaatbare risico zou uitkomen op 16,5%. De kans dat de accountant ten onrechte zou concluderen dat de controletolerantie

ad f 50.000 niet zou zijn overschreden, is dan het product van de risico's van de twee deelconclusies. Dit product is  $0,301 * 0,165 = 0,050$ , het accountantscontrolerisico waarvan is uitgegaan. Dit is dus exact het door de accountant nagestreefde resultaat.

De rechtevenredige toedeling van de controletolerantie heeft één duidelijk voordeel: als de werkelijke fouten anders dan rechtevenredig over de deelpopulaties verdeeld zijn, is de kans op ontdekking van fouten *altijd* groter dan bij rechtevenredige verdeling van de werkelijke fouten over de deelpopulaties. De kans op ontdekking van fouten in de populatie met de grootste foutdichtheid wordt dan namelijk groter dan waarvan bij de vaststelling van het aanvaardbaar geachte risico is uitgegaan.

In het voorgaande cijfervoorbeeld ben ik, evenals in § 4, uitgegaan van een vast accountantscontrolerisico. In § 5 heb ik mijn artikel van 1993 in herinnering gebracht, waarbij ik een wisselend risico per deelpopulatie voorstel, op basis van een kosten/batenanalyse. De vraag kan rijzen of de vorengeschetste toets op de deugdelijkheid van de kritische steekproef ook bij dit uitgangspunt kan worden gehanteerd. Ik zie voorshands geen redenen deze vraag ontkennend te beantwoorden. De procedure zou dan enigszins anders verlopen, maar het zou te ver voeren deze hier uiteen te zetten.

## 8 Slot

In mijn meergenoemd artikel van 1993 heb ik een onderzoekprocedure voorgesteld die naar mijn mening meer recht doet aan de belangen van gebruikers van verantwoordingen dan de risico-analyse zoals deze thans wordt gepropageerd. In § 4 van dat artikel heb ik de vraag opengelaten hoe de tolerantie zou moeten worden vastgesteld; deze heb ik in het voorgaande beantwoord. De hiermee voorgestelde onderzoekprocedure moge gecompliceerd lijken, maar dat leek de risico-analyse ten tijde van de introductie ook; ik geloof niet dat mijn voorstel wezenlijk ingewikkelder is.

Eerst moet echter worden vastgesteld of dit voorstel deugt, althans beter is dan de huidige praktijk. Gezien het belang dat mij tot deze gedachten heeft geïnspireerd - dat van het maatschappelijk verkeer - nodig ik gaarne uit tot een openbare discussie hierover. liefst in dit blad.



## LITERATUUR

- Akresh, A.P., Loebbecke, J.L. en Scott, W.R., (1988), Audit Approaches and Techniques. In: Abdel-Khalik, A.R. en Solomon, I. (eds): *Research Opportunities in Auditing: The Second Decade*. American Accounting Association, Sarasota, Florida.
- Van Barneveld, J.H. en Van Densen, L.Y.F.M., (1990), Accountantscontrolesrisico en tolerantie in onderlinge samenhang bij een (interne) accountantsdienst, *MAB*, oktober.
- Blokdijk, J.H., (1993), Afweging van kosten en nut bij steekproeven in de accountantscontrole, *MAB*, september.
- Elliott, R.K., (1983), Author's Response to a Letter to the Editor, *Journal of Accountancy*, juli.
- Frielink, A.B. en De Heer, H.J., (1993), *Leerboek Accountantscontrole*, Deel 3B, Capita Selecta. Stenfert Kroese, Leiden.
- Gafford, W.W. en Carmichael, D.R., (1984), Materiality, Audit Risk and Sampling, a nuts-and-bolts approach (parts one and two), *Journal of Accountancy*, oktober en november.
- Leslie, D.A., Teitlebaum, A.D. en Anderson, R.A., (1979), *Dollar-Unit Sampling, A Practical Guide for Auditors*, Copp Clark Pitman, Toronto.
- NIVRA, (1982), *Geschrift 25: Accountantscontrole en steekproef*. Kluwer, Deventer.
- NIVRA, (1989), *Geschrift 46: Materialiteit bij de opstelling en de controle van de jaarrekening*. Kluwer Bedrijfswetenschappen, Deventer.
- NIVRA, (1991), *Ontwerp-Richtlijn voor de Accountantscontrole 3.02: Materieel belang en controletolerantie*. NIVRA.
- NIVRA, (1992), *Ontwerp-Richtlijn voor de Accountantscontrole 4.04: Risico-analyse*. NIVRA.
- NIVRA, (1993), *Ontwerp-Richtlijn voor de Accountantscontrole 3.01: Afbakening en inhoud van het onderzoek naar de getrouwheid van een verantwoording*. NIVRA.
- Zuber, G.R., Elliott, R.K., Kinney Jr., W.K. en Leisenring, J.J., (1983), Using Materiality in Audit Planning. *Journal of Accountancy*, maart.

## Appendix

### 1 Inleiding

Deze Appendix omvat de bewijsvoering voor de in het artikel ingenomen stelling dat toedeling van de controletolerantie niet noodzakelijk is bij toepassing van statistische steekproeven. Voorts wordt aandacht geschonken aan het risico dat bij kritische steekproeven kan worden genomen.

Uitgegaan is van de Poissonverdeling. Hoewel de binomiale verdeling strikt genomen theoretisch

beter aansluit op de problematiek zoals deze zich in de praktijk voordoet, is de Poissonverdeling hiervan een in de accountantspraktijk goed bruikbare en veelvuldig toegepaste benadering.

### 2 Legenda

In deze Appendix worden de volgende symbolen gebruikt:

|           |                                                                                      |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| k         | Aantal fouten aangetroffen in een steekproef                                         |
| $P(k=k)$  | Feitelijke kans om k fouten in een steekproef aan te treffen                         |
| $\beta$   | Aanvaardbaar geacht (hoogste) steekproefrisico ten aanzien van de controletolerantie |
| $\beta_x$ | Vereist risico ten aanzien van de deeltolerantie in deelpopulatie x                  |
| e         | Het grondtal van de natuurlijke logaritmen (2,7182818284...)                         |
| /         | Gedeeld door                                                                         |
| T         | Totale omvang van alle deelpopulaties tezamen                                        |
| $T_x$     | Omvang van de deelpopulatie x                                                        |
| M         | Controletolerantie                                                                   |
| $M_x$     | Tolerantie voor de deelpopulatie x                                                   |
| n         | Omvang van de steekproef uit de totale populatie                                     |
| $n_x$     | Omvang van de steekproef uit de deelpopulatie x                                      |
| p         | Kleinste onaanvaardbare foutenfractie in de totale populatie ( $M/T$ )               |
| $p_x$     | Kleinste onaanvaardbare foutenfractie in de deelpopulatie x ( $M_x/T_x$ )            |

### 3 Toedeling van de controletolerantie bij steekproeven met goedkeuring uitsluitend bij 0 fouten

De algemene formule volgens de Poissonverdeling voor de kans 0 fouten aan te treffen in een steekproef groot n stuks uit een populatie met een foutenfractie groot p is:

$$P(k=0) = e^{-np}$$

Als men als eis stelt dat deze kans niet groter dan  $\beta$  mag zijn, dan kan de steekproefomvang n worden bepaald met behulp van de formule:

$$\beta = e^{-np}$$

De kans 0 fouten aan te treffen in  $x$  steekproeven groot  $n_1, n_2, \dots, n_x$  uit populaties met foutenfracties respectievelijk groot  $p_1, p_2, \dots, p_x$  is het product van de afzonderlijke kansen op 0 fouten uit de afzonderlijke steekproeven, dus:

$$\beta = e^{-n_1 p_1} * e^{-n_2 p_2} * \dots * e^{-n_x p_x}, \text{ ofwel:}$$

$$\beta = e^{-n_1 p_1 - n_2 p_2 - \dots - n_x p_x}$$

Om te bereiken dat uit het geheel van de afzonderlijke steekproeven de conclusie kan worden getrokken dat de totale fout niet groter is dan de nog juist toelaatbare foutenfractie  $p$  van het geheel van de populaties, moet dan gelden:

$$np = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \dots + n_x p_x$$

De toelaatbare foutenfractie  $p$  is per definitie het quotiënt van de controletolerantie ( $M$ ) en het totaalbedrag van alle populaties tezamen ( $T$ );  $p = M/T$ . Evenzo geldt:  $p_x = M_x/T_x$ .

Om het gestelde doel te bereiken moet dus gelden:

$$nM/T = n_1 M_1/T_1 + n_2 M_2/T_2 + \dots + n_x M_x/T_x$$

Nu zijn de grootheden  $T_x$  gegeven: het zijn de totaalbedragen van de afzonderlijke te controleren deelpopulaties. De grootheden  $n_x$  en  $M_x$  kunnen echter door de accountant worden vastgesteld, hetgeen mogelijkheden lijkt te bieden voor een optimalisatie vanuit kostenooptpunt.

Per afzonderlijke deelpopulatie moet echter nog een tweede eis gelden, namelijk dat de kans op 0 fouten indien de foutenfractie in de deelpopulatie de *totale* controletolerantie ( $M$ ) overschrijdt, ten hoogste gelijk mag zijn aan  $\beta$ . Dit betekent dat voor elke deelpopulatie moet gelden:

$$n_x M/T_x = nM/T$$

dus:

$$n_x/T_x = n/T, \text{ ofwel:}$$

$$n_x = n * T_x/T$$

Uit deze tweede eis volgt: rechtsevenredige toedeling van de steekproefomvang aan de afzonderlijke deelpopulaties. Dan rijst de vraag of aan de eerste eis is voldaan.

Als  $n_x = n * T_x/T$ , dan wordt

$$n_1 M_1/T_1 + n_2 M_2/T_2 + \dots + n_x M_x/T_x$$

gelijk aan:

$$n * T_1/T * M_1/T_1 + n * T_2/T * M_2/T_2 + \dots + n * T_x/T * M_x/T_x$$

ofwel:

$$n/T * (M_1 + M_2 + \dots + M_x) = nM/T$$

Dus is door rechtsevenredige toedeling ook aan de eerste eis voldaan.

Om de steekproefomvang voor een deelpopulaties te kunnen bepalen is het echter niet noodzakelijk  $T$  te kennen. Omdat bij rechtsevenredige toedeling geldt (zie hiervoor):

$$n_x M/T_x = nM/T$$

en voor het steekproefrisico ( $\beta$ ) geldt:

$$\beta = e^{-nM/T},$$

kan de bepaling van de steekproefomvang geschieden vanuit de formule:

$$\beta = e^{-n_x M_x/T_x},$$

waarbij  $\beta$  en  $M$  bij de planning van de controle zijn vastgesteld en  $T_x$  gegeven is.

De hantering van deze formule is ook thans reeds algemeen gebruikelijk; de vereiste handelingen zijn veelal geautomatiseerd. In plaats van de deeltolerantie ( $M_x$ ) dient de controletolerantie ( $M$ ) te worden ingevoerd.

Toedeling van de controletolerantie is dus overbodig.

Hiermede is de in het artikel beschreven stellingname gerechtvaardigd.

*4 Toedeling van de controletolerantie bij steekproeven met goedkeuring bij meer dan 0 fouten in alle deelpopulaties tezamen*

Te bewijzen ware, dat de in de voorgaande paragraaf geschetste procedure valide is ongeacht de beslisregel, dus óók indien de steekproefproce-

dure zó gekozen wordt dat bij méér dan 0 fouten in alle steekproeven te zamen goedgekeurd kan worden. Dit bewijs zal in een wat abstractere vorm worden gegeven dan in de voorgaande paragraaf.

Ter herinnering: er gelden twee eisen

- a er mag niet meer dan  $\beta$  risico worden gelopen dat er meer dan  $M$  fout is in de populaties met de totalen  $T_1, T_2, \dots, T_x$  te zamen;
- b er mag niet meer dan  $\beta$  risico worden gelopen dat er meer dan  $M$  fout is in *elke afzonderlijke* populatie.

Dit is te bereiken door alle populaties te zamen als één populatie te beschouwen, waaruit één steekproef wordt getrokken. De verdeling van de kansen op 0, 1, 2, ...  $k$  fouten in een steekproef is een Poissonverdeling, met als parameter  $nM/T$ . Door eisen te stellen aan  $\beta$  (het steekproefrisico) en  $M$  (het bedrag van de totale controletolerantie), voorts  $k$  (het hoogst toegestane aantal fouten in de steekproef) te bepalen en kennis te nemen van  $T$  (het totaal van alle populaties te zamen) kan  $n$  (de steekproefomvang) worden bepaald.

De andere, in de praktijk meest wenselijke methode is: afzonderlijke steekproeven op populaties met de totalen  $T_1, T_2, \dots, T_x$ .

De tweede eis impliceert de veronderstelling dat de totale fout  $M$  in één van de populaties zou zitten. Nu wordt bij een steekproef uit de totale populatie ( $T$ ) de betrouwbaarheid  $\beta$  bereikt bij een steekproef gebaseerd op een Poissonverdeling met parameter  $nM/T$ . Bij een steekproef uit de populatie  $T_x$  wordt  $\beta$  dus bereikt als de parameter  $n_x M/T_x$  gelijk is aan de parameter  $nM/T$ , dus als:

$$n_x = nT_x/T$$

Dit betekent weer: rechtevenredige toedeling; deze (tweede) eis geldt voor elke afzonderlijke deelpopulatie.

De vraag rijst dan: wordt bij deze aanpak ook voldaan aan de eerste eis? Het gaat nu niet om de situatie dat een fout ter grootte van de totale controletolerantie ( $M$ ) in één populatie zit (zoals bij de tweede eis), doch verspreid over alle populaties kan voorkomen, zodat

$$M_1 + M_2 + \dots + M_x \geq M.$$

Uit de kansrekening is bekend dat de kansverdeling van de combinatie van twee stochastische verschijnselen die elk een Poissonkansverdeling hebben (zoals het aantreffen van fouten

in een steekproef), ook weer een Poissonverdeling is, met als parameter de som van de parameters van de Poissonverdelingen van de afzonderlijke verschijnselen.

De parameters van de afzonderlijke steekproeven zijn:

$$n_1 M_1/T_1, n_2 M_2/T_2, \dots, n_x M_x/T_x$$

Opgeteld zouden deze gelijk moeten zijn aan de parameter van de totale steekproef,  $nM/T$ .

$$\text{Op grond van de tweede eis is } n_x = nT_x/T,$$

zodat de vraag rijst:

$$nM_1/T + nM_2/T + \dots + nM_x/T = nM/T ?$$

$$\text{Aangezien } M_1 + M_2 + \dots + M_x = M,$$

is dit dus waar. Daarmee meen ik te hebben aangetoond dat de in dit artikel beschreven procedure ook geldt bij een steekproefprocedure waarbij tevoren is vastgesteld dat goedgekeurd kan worden bij het aantreffen van een tevoren vastgesteld aantal van meer dan 0 fouten.

### 5 Het toelaatbare risico bij equivalentie van een kritische steekproef en een statistische steekproef

De vraag is: wat mag het (steekproef)risico  $\beta$  ten hoogste zijn ten aanzien van deeltolerantie  $M_x$  om equivalentie te verkrijgen met een steekproefrisico van  $\beta$  ten aanzien van de controletolerantie  $M$  bij een steekproef uit dezelfde deelpopulatie?

Nu geldt per definitie:

$$\beta_x = e^{-n_x M_x/T_x},$$

ofwel:

$$\beta_x = e^{-n_x M/T_x * M_x/M}$$

Blijkens § 3 van deze Appendix geldt ook:

$$\beta = e^{-nM/T_x}$$

Dus geldt:

$$\beta_x = \beta^{M_x/M}.$$

hetgeen in § 7 van het artikel is gesteld.