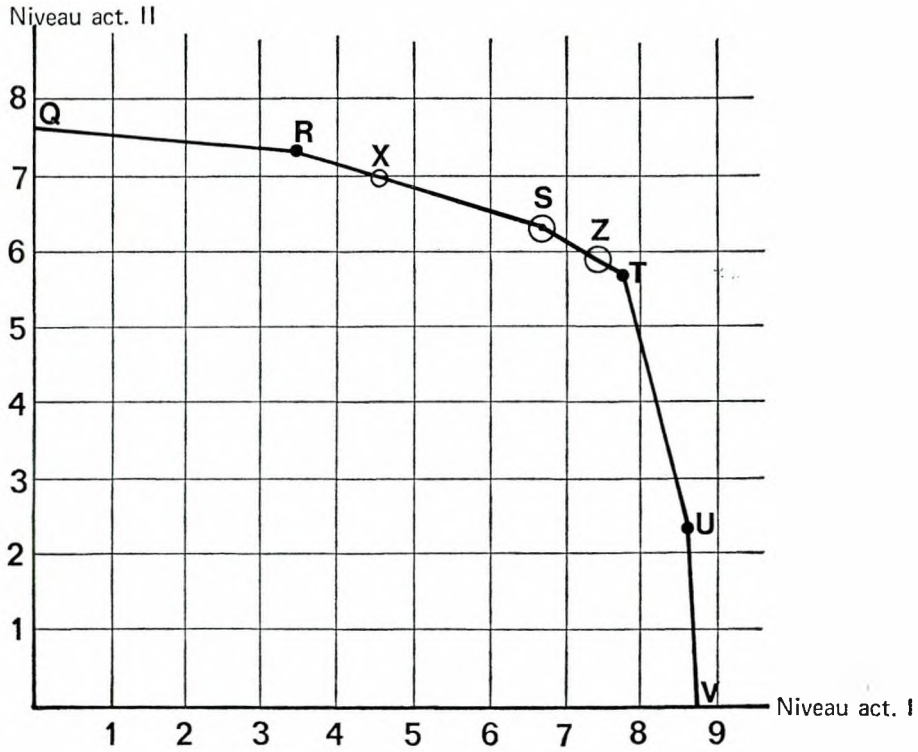
OVER DE BEREKENING VAN GEMENGD-DISCRETE PLANNEN MET BEHULP VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

door Dr. Ir. J. Mol

1 Inleiding

In een vorig artikel werd uiteen gezet op welke wijze een verzameling alternatieve plannen kon worden vastgesteld in de omgeving van het optimum van een lineaire programmering.[1]) Daarbij werd vermeld dat met betrekkelijk weinig moeite gemengd-discrete plannen konden worden afgeleid uit de verzameling van berekende alternatieve plannen.

Dit idee kan grafisch worden verduidelijkt voor een programmering met twee activiteiten. Stel dat voor deze programmering de plannen Q, R, en T in de omgeving van het optimum S zijn vastgesteld (fig. 1).



Figuur 1

Van de grafiek kan nu direct worden afgelezen dat het niveau van activiteit II zich bij deze plannen bevindt in het betrekkelijk nauwe traject tussen 8 en 5, terwijl het niveau van activiteit I zich uitstrekt over een veel breder traject van waarden.

[1]) Zie M.A.B. van juli 1968.

Zou men nu een gemengd-discreet plan in de omgeving van het optimum moeten vaststellen, met als eis dat het niveau van activiteit II op een geheel getal moet uitkomen, dan is het duidelijk dat de plannen Q, R, S en T suggereren om dit niveau te stellen op bijv. 6 (of op bijv. 7). Bij deze waarden voor het niveau van activiteit II zouden dan de gemengd-discrete plannen Z en X worden gevonden. Zoals fig. 1 aangeeft zijn dit plannen dicht in de omgeving van het optimum.

Wat hier geldt voor het bijzondere geval van twee activiteiten geldt eveneens voor programmeringen met meer dan twee activiteiten. Ook hierbij zal de verzameling van plannen in de omgeving van het optimum ons waardevolle aanwijzingen verstrekken over de uitgebreidheid van het veld van discrete waarden in welke wij de af te leiden gemengd-discrete plannen moeten vinden. Alvorens dit uit te werken geven wij echter eerst de wiskundige formulering van het gestelde.

2 Wiskundige formulering van het probleem

Wij stellen in eerste instantie een lineair programmeringsprobleem in termen van matrix-algebra aldus:

maximeer $\rho = p'x$ (1)

met als nevenvoorwaarden

$A\,x = b$ (2)

en $x \geqq o$ (3)

waarbij A een matrix is van n vectoren a^1 t/m a^n (van de m^{de}orde), b een vector van de m^{de} orde en p een vector van de n^{de} orde. Stel een vector x_{opt} is de optimale oplossing met een optimum dat wij ρ_{opt} zullen noemen.

Wij bepalen vervolgens alle oplossingen in de omgeving van x_{opt} en wel zodanig dat

$$\rho = p'x \geqq \rho_{opt} - \frac{q}{100} \cdot \rho_{opt} \qquad (4)$$

Daarbij is q een te kiezen klein getal.

In dit artikel gaat het er nu om om uit de oplossingen x, gemengd-discrete oplossingen te vinden welke aan (1) t/m (4) voldoen en waarvoor tevens geldt dat een of meer elementen (x_i) van de vector x, dienen te behoren tot de verzameling der gehele getallen. Stel bijv. dat voor bepaalde gemengd-discrete programmeringen de niveaus van de eerste r activiteiten op gehele getallen moeten worden gesteld, dan wordt tevens, in aanmerking nemend voorwaarde (3), als eis gesteld $x_i \varepsilon G$ (i = 1, 2, 3 .... r) waarbij G is de verzameling per positieve gehele getallen inclusief nul.

3 Afleiding van gemengd-discrete plannen

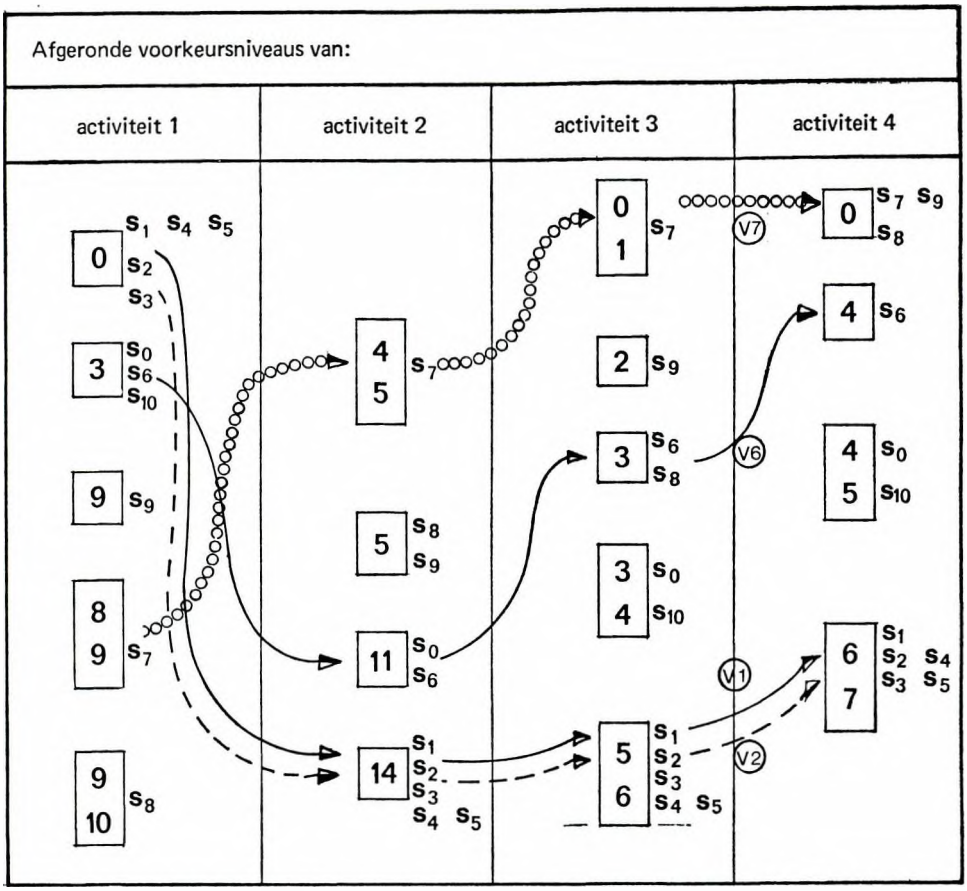
Aan de hand van een praktisch voorbeeld zal nu worden aangegeven op welke wijze gemengd-discrete plannen kunnen worden opgesteld uit een verzameling van plannen in de nabijheid van het optimum. Wij kiezen hiervoor een door ons uitgevoerde produktieplanning ten behoeve waarvan een simplex-tableau werd opgesteld met 19 activiteiten en 43 beperkingen. Op basis hiervan werden een aantal oplossingen gegenereerd met financiële verwachtingen liggend tussen *f* 49.249,— (=ρ_{opt}) en (*f* 49.249,— minus 1% van *f* 49.249,— =) *f* 48.756,—.

Van een gedeelte van deze oplossingen vermelden wij in tabel 1 slechts de niveaus van de activiteiten 1 t/m 4, namelijk die welke wij willen stellen op gehele positieve getallen of op nul.

Tabel 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	..	..	te verwachten opbrengst
S_0	2,99	11,03	3,27	4,70	..	..	*f* 49249
S_1	0,02	13,97	5,34	6,46	..	..	49189
S_2	–	14	5,33	6,48	..	..	49179
S_3	–	14	5,35	6,42	..	..	49164
S_4	0	14	5,52	6,47	..	..	49109
S_5	0,04	13,95	5,50	6,49	..	..	49129
S_6	3,1	10,94	3,1	4,03	..	..	48772
S_7	9,74	4,25	0,63	0	..	..	48980
S_8	8,82	5,17	2,8	0	..	..	48908
S_9	9,10	4,99	2,15	0	..	..	48841
S_{10}	2,95	11,04	3,46	4,35	..	..	49180

Wij zien nu dat x_1 zich bij voorkeur bevindt in de omgeving van 0 (zie S_1 t/m S_5), in de omgeving van 3 (zie S_0, S_6 en S_{10}), in de omgeving van 9 (zie S_9), bij 9 of 10 (zie S_7) en bij 8 of 9 (zie S_8). Bepalen wij op dezelfde wijze de trajecten van x_2 t/m x_4, dan kunnen de volgende variatiepatronen worden vastgesteld; de pijlen geven hierbij aan op welke wijze x_1 t/m x_4 simultaan dienen te variëren als men blijft streven naar een financiëel resultaat in de buurt van het optimum.



Tabel 2

Volgen wij nu de pijl V_6 in tabel 2 dan zien wij dat een plan waarbij x_1 t/m x_4 worden gesteld op resp. 3, 11, 3 en 4, hoogstwaarschijnlijk een uitvoerbaar plan is, dat zeer sterk lijkt op het plan van S_6. De toetsing van de uitvoerbaarheid kan geschieden door de combinatie $3a^1 + 11a^2 + 3a^3 + 4a^4$ af te trekken van de beschikbaarheidsvector b. Zijn al de elementen in de dan verkregen vector $\geqq 0$ dan is het plan uitvoerbaar. Gezien de zeer geringe afrondingen die nodig zijn in het plan van S_6 om te komen tot het gewenste gemengd-discrete plan met x_1 t/m x_4 op resp. 3, 11, 3 en 4, kunnen voor dit plan de waarden x_5 t/m x_n worden overgenomen uit S_6.

Zouden in tabel 2 de overige pijlen worden getrokken, dan zouden sommige daarvan samenvallen, bijv. V_1, V_2, V_3 V_4 en V_5. V_1 t/m V_5 hebben dan hetzelfde variatiepatroon. Nadere bestudering van dit patroon suggereert de mogelijkheid van gemengd-discrete plannen volgens onderstaande combinatorische boom (zie fig. 2).

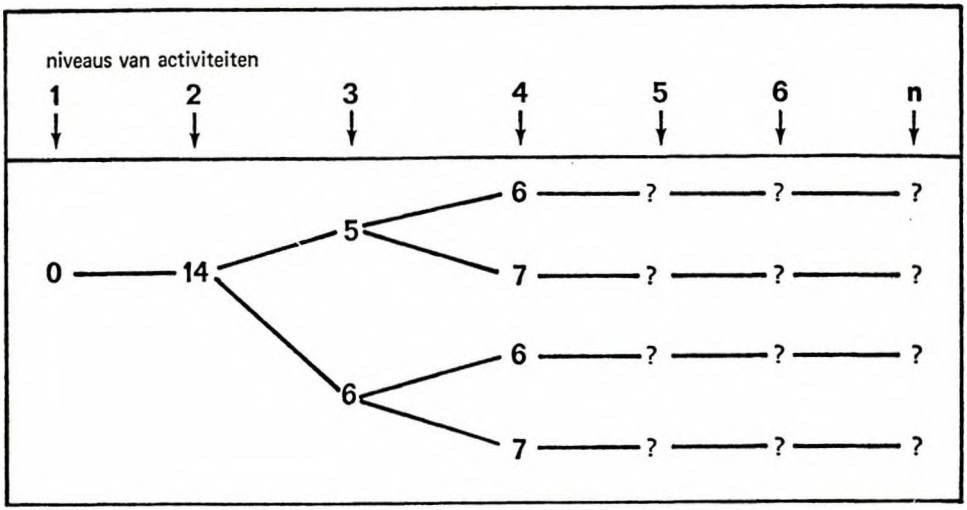


Fig. 2

Onderzocht dient weer te worden welke van de combinaties $0a^1 + 14a^2 + 5a^3 + 6a^4$, $0a^1 + 14a^2 + 5a^3 + 7a^4$, $0a^1 + 14a^2 + 6a^3 + 6a^4$ en $0a^1 + 14a^2 + 6a^3 + 7a^4$ eventueel in strijd zijn met de voorwaarden (2) en (3). Stel nu dat vaststelling van de niveaus x_1 t/m x_4 op, bijv. 0, 14, 5 en 7 technisch uitvoerbaar is, d.w.z. niet in strijd met (2) en (3), dan is weer een gedeelte van een alternatief gemengd-discreet plan vastgesteld. Is men tevreden met een ruwe benadering in de niveaus x_5 t/m x_n dan nemen we deze over uit bijv. S_1. Vreest men evenwel dat deze ruwe procedure weer geweld zal aandoen aan de voorwaarden (2) en (3) of gelooft men dat het te verwachten financiële resultaat nog aanmerkelijk kan worden opgevoerd door een meer verfijnde methode, dan is het beter daarmee x_5 t/m x_n vast te stellen.

Een wat veel rekentijd vergende maar goede methode ter vaststelling van x_5 t/m x_n is uiteraard de oplossing van het volgende lineaire program:

maximeer $\rho^* = p_*'x^*$

(waarbij $p^1{}_*$ is een rij van de (n-4) te verwachten opbrengsten van de activiteiten 5 t/m n en x_* een vector van de orde (n-4) bestaande uit de elementen x_5 t/m x_n).

Als nevenvoorwaarden worden gesteld:

$A^*x_* = b - \{0a^1 + 14a^2 + 5a^3 + 7a^4\}$

en $x_* \geqq 0$ (waarbij $A^* = [a^5, a^6 \ldots a^n]$

Wij stellen vervolgens nog vast of de gemengd-discrete oplossing een te verwachten opbrengst geeft tussen ρ_{opt} en $\rho_{opt} - \frac{q}{100}\rho_{opt}$.

Is dit het geval dan kan de genoemde oplossing als een bruikbaar alternatief worden bewaard. Al naar gelang de behoefte aan alternatieve plannen kunnen op de hier beschreven wijze uit de overige niet ingetekende voorkeursvariatiepatronen gemengd-discrete plannen worden afgeleid.

Wij merken nog op dat tussen de afgeleide plannen het zgn. optimale gemengd-discrete plan niet aanwezig behoeft te zijn. De kans dat er zich plannen onder bevinden welke zeer dicht het optimum benaderen is echter groot.