*Drs. G. J. C. Th. van Schijndel*

# Dynamische modellen in de bedrijfseconomie[1]

## 1. Inleiding

Een belangrijk aspect van de economie is de tijdsfactor. Beslissingen worden genomen op basis van tijdsafhankelijke gegevens en hebben bovendien in vele gevallen ook in de toekomst gevolgen voor de situatie waarin een bedrijf zich bevindt en het te voeren beleid door het management. In de praktijk zien we ondernemingen groeien, stilstaan en/of inkrimpen en hebben bepaalde maatregelen eerst na verloop van tijd hun beoogde uitwerking. De economie is derhalve altijd in beweging.
In tegenstelling tot de algemene economie, waar het expliciete gebruik van de tijdsfactor in structuur- en conjunctuurmodellen een gemeengoed is, heeft de aanwending van dynamische modellen binnen de bedrijfseconomie eerst in de laatste jaren een grote vlucht genomen. Deze snelle ontwikkeling is onder andere een gevolg van de introductie van het zogenaamde 'maximum principe van Pontryagin' binnen de theorie van de onderneming. Met behulp van deze wiskundige techniek is het mogelijk om van een dynamisch probleem de optimale oplossing op een analytische wijze te bepalen.
In dit artikel zullen we trachten een beeld te geven van de huidige stand van zaken op het gebied van beschikbare typen dynamische modellen voor bedrijfseconomische problemen. Na een terreinafbakening in paragraaf 2 zullen we een aantal oplossingsconcepten in beschrijvende vorm de revue laten passeren en een en ander met bedrijfseconomische voorbeelden verduidelijken (par. 3). Daarna zullen we in de paragrafen 4 en 5 stilstaan bij studies die thans grote belangstelling genieten binnen de bedrijfseconomische theorievorming, zoals toepassingen van 'optimal control' en de theorie der differentiaalspelen.

## 2. Optimale besturingstheorie

In de bedrijfseconomische theorie is op verschillende wijzen getracht het tijdsaspect in de beschouwingen op te nemen. Een bekende methode is het gebruik van exponentiële groeimodellen door te veronderstellen dat alle variabelen met een constante voet g zullen groeien.
De waarde van zo'n variabele X wordt op tijdstip T dan vastgelegd door:

(1) $X(T) = X_0\,(1+g)^T$ discreet

(2) $X(T) = X_0 e^{gT}$ continu

Een klassiek voorbeeld kan worden gevonden in het groeimodel van Gordon.

*voorbeeld 1: model van Gordon*
Gordon heeft dit model ontwikkeld om de optimale verhouding te kunnen bepalen tussen winstinhoudingen en dividenduitkeringen. Aanwending van ingehouden winst ter financiering van uitbreidingsinvesteringen leidt enerzijds tot een verlaging van de huidige dividend mogelijkheden, maar anderzijds tot een mogelijke verhoging van toekomstige dividenduitkeringen. We kunnen voor dit probleem het volgende model opstellen:

*definitie*

| | | |
|---|---|---|
| W | = | waarde van de onderneming |
| K(T) | = | waarde van de kapitaalgoederenvoorraad op T |
| CF(T) | = | netto kasstroom op T |
| D(T) | = | dividenduitkeringen op T |
| r | = | interne rentabiliteit |
| i | = | tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders |
| z | = | planhorizon |
| b | = | fractie ingehouden winst |

*model*

(3) $D(T) = (1-b) \cdot CF(T) = (1-b) \cdot CF_0 \cdot e^{rbT}$

(4) $CF(T) = rK(T)$

(5) $W = \int_{T=0}^{z} D(T)e^{-iT}dt = \int_{T=0}^{z} (1-b) \cdot CF_0 \cdot e^{rbT}e^{-iT}dT$

*toelichting*
(3) Een fractie b van de netto kasstroom wordt ingehouden, zodat (1-b) aan de aandeelhouders toekomt.
(4) De kapitaalgoederenvoorraad kent een constante rentabiliteit.
(5) De waarde van de onderneming is gelijk aan de contante waarde van de toekomstige dividenden. Als disconteringsvoet wordt gebruikt de bekend veronderstelde tijdsvoorkeurvoet i. De onderneming kent geen externe financiering.

*oplossing*
De onderneming wil de marktwaarde W maximaliseren door een optimale inhoudingsvoet b vast te stellen.
– als de rentabiliteit van de onderneming groter is dan de tijdsvoorkeurvoet ($r > i$) is dit mogelijk door de disconteringsfactor en de interne groeivoet aan elkaar gelijk te stellen: $i = rb$
– als $r = i$ is de waarde W onafhankelijk van b en is iedere b-waarde optimaal
– als $r < i$ wordt de totale kasstroom uitgekeerd, omdat de rentabiliteit van de onderneming in de beoordeling van de aandeelhouders te laag is.

Een andere methode om het tijdsaspect te introduceren vinden we in het investeringsselectieprobleem van Lorie & Savage.

*voorbeeld 2: investeringsprobleem van Lorie & Savage*
De onderneming dient een keuze te maken tussen een aantal investeringsprojecten met bekende opbrengstmogelijkheden onder de voorwaarde dat de uitgaven, die de investeringen jaarlijks oproepen, de jaarbudgetten niet overschrijden.

*definitie*

$CW_j$ = contante waarde van de opbrengst van project j

$C_j(T)$ = uitgaven van project j in periode T

$W(T)$ = beschikbaar budget in periode T

$F_j$ = indicator van al dan niet opname van project $F_j = \{0,1\}$.

*model*

$$\max_{F_j} \sum_j F_j CW_j \tag{6}$$

$$\text{odv} \quad \sum_j C_j(T)F_j \leq W(T) \tag{7}$$

Zowel het model van Gordon als dat van Lorie & Savage kunnen eenvoudig worden opgelost door gebruik te maken van de klassieke methode van optimaliseren respectievelijk lineaire programmering (zie par. 3).
De oplossingen van beide voorbeelden zijn tijdsonafhankelijk: op het starttijdstip wordt de optimale waarde van de beslissingsvariabele bepaald en deze blijft gedurende de periode hetzelfde. Het is evenwel mogelijk de beslissingsvariabele tijds- en toestandsafhankelijk te veronderstellen, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

*voorbeeld 3: dynamische variant van Gordon*
In het behandelde model van Gordon kent de te optimaliseren inhoudingsfractie slechts één waarde en is de rentabiliteit zowel in de tijd als naar omvang van de kapitaalgoederenvoorraad constant verondersteld. Verheyen (1976) komt gedeeltelijk aan deze bezwaren tegemoet door in voorbeeld 1 de vergelijkingen (3) en (4) te vervangen door

$$D(T) = (1-b(T))CF(T) \tag{8}$$

$$CF(T) = f(K(T)) \tag{9}$$

waarin de fractie ingehouden winst b(T) kan variëren in de tijd en de kasstroom een functie is van de kapitaalgoederenvoorraad, waarbij afnemende meeropbrengsten worden verondersteld.
In deze dynamische variant van het Gordon-model dient de onderneming voor ieder tijdstip de optimale waarde van de inhoudingsfractie te bepalen. Deze inhouding leidt tot een toename van de kapitaalgoederenvoorraad

met als gevolg een dalende gemiddelde rentabiliteit, hetgeen consequenties kan hebben voor toekomstige beslissingen. De onderneming dient derhalve in een tijdsbestek een aantal beslissingen te nemen, die elkaar sterk beïnvloeden. We hebben te maken met een optimaal besturingsprobleem, dat besliskundig gezien thuishoort in de klasse van zogenaamde meerstapsbeslissingsproblemen: een beslisser dient een aantal opeenvolgende beslissingen te nemen, waarbij de toestand waarin het systeem ten gevolge van een beslissing overgaat, van invloed is op die beslissing. Ter illustratie geven we het volgende voorbeeld uit de bedrijfseconomie.

*voorbeeld 4: een produktie-voorraad probleem*
Een onderneming is contractueel verplicht aan het einde van elke week een gegeven aantal van een bepaald produkt te leveren. Zij kan daartoe in de loop van elke week dit aantal produceren of in een tijdsbestek van een week meer eenheden produceren en de overblijvende eenheden op voorraad leggen, waardoor de mogelijkheid ontstaat de produktie tijdelijk stil te leggen. Zowel de produktiecapaciteit als de voorraadruimte zijn beperkt. De onderneming wil per kwartaal een produktieplan opstellen, zodanig dat de totale kosten minimaal zijn.

*definitie*

| | | |
|---|---|---|
| C(T) | = | totale kosten per week |
| Y(T) | = | produktie per week |
| V(T) | = | voorraad aan het einde van de week |
| a | = | vaste produktiekosten |
| b | = | produktiekosten per eenheid produkt |
| c | = | voorraadkosten per produkt |
| x | = | contractuele afzet per week |

*model*

$$\min_{Y} \sum_{T=1}^{13} C(T) \tag{10}$$

$$\text{met } C(T) = \begin{cases} a + bY(T) + cV(T) & \text{als } Y(T) > 0 \\ cV(T) & \text{als } Y(T) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\text{odv } V(T) - V(T-1) = Y(T) - x \tag{12}$$

$$0 \leqq Y(T) \leqq Y\max \tag{13}$$

$$0 \leqq V(T) \leqq V\max \tag{14}$$

$$V(0) = V_0 \tag{15}$$

*toelichting*

(10) *doelstellingsfunctie*: het minimaliseren van de totale kosten gedurende het kwartaal met als beslissing/*stuurvariabele* de produktiehoeveelheid per week

(11) specificatie van de kosten: produceren brengt vaste en variabele kosten met zich mee, voorraadvorming alleen variabele kosten

(12) *Bewegingsvergelijking* die de ontwikkeling aangeeft van de voorraad: toename door de produktie en afname overeenkomstig de afzet. De voorraad fungeert in wiskundige zin als *toestandsvariabele.*

(13)-(14) *Randvoorwaarden*, die beperkingen opleggen aan zowel toestand als sturing

(15) *Startwaarde*, die de uitgangspositie van de onderneming aangeeft.

Dit voorbeeld toont duidelijk de afhankelijkheid van de opeenvolgende beslissingen/besturingen. De bewegingsvergelijking (12) geeft aan dat de huidige voorraad niet alleen afhankelijk is van de huidige produktie en afzet, maar ook van produktie-overschotten of -tekorten in het verleden. Heeft de onderneming besloten om in voorgaande perioden op maximale capaciteit te produceren, dan is het denkbaar dat een dergelijke beslissing tijdens de huidige periode niet mogelijk is, gezien de beperkte voorraadcapaciteit.
In dit artikel gaat onze aandacht uit naar deze laatste klasse van dynamische modellen: de optimale besturingstheorie.

## 3. Oplossingsconcepten voor dynamische problemen

Afhankelijk van de modelformulering kunnen meerstapsbeslissingsproblemen met behulp van een aantal optimaliseringstechnieken worden opgelost, zoals wiskundige programmering, dynamische programmering, variatierekening en ‘optimal control’.

*wiskundige programmering*
De wiskundige programmering is bij de lezer naar alle waarschijnlijkheid het best bekend, daar hiertoe ook lineaire en convexe programmering behoren. Wiskundig gezien is de wiskundige programmering een zeer geschikte oplosmethode voor éénstapsbeslissingsproblemen, waarbij, al dan niet onder randvoorwaarden, de optimale waarden kunnen worden bepaald. Indien het model geen randvoorwaarden kent is het optimum te bepalen met behulp van de klassieke methode, waarbij de partiële afgeleiden naar de stuur/beslissingsvariabelen gelijk worden gesteld aan nul.
In een model met randvoorwaarden zijn de waarden van de variabelen beperkt tot een toegelaten gebied. Voor dergelijke problemen kunnen een drietal oplossingsmethoden bruikbaar zijn:
- multiplicatorenmethode van Lagrange
- lineaire programmering
- convexe/kwadratische programmering.

Bij deze methoden kunnen zogenaamde *schaduwprijzen* worden bepaald. In de optimale oplossing geeft zo’n schaduwprijs de waardeverandering van de doelfunctie weer, indien de grens van een actieve randvoorwaarde met één eenheid kan worden verschoven.
De wiskundige programmering kent tal van praktische toepassingsmogelijkheden. Bekend is het klassieke handelsreizigerprobleem, terwijl ook het

investeringsprobleem van Lorie & Savage uit voorbeeld 2 op een eenvoudige manier met behulp van lineaire programmering op te lossen is.
Ook kan wiskundige programmering worden gebruikt voor het oplossen van meerstapsbeslissingsproblemen door het te beschouwen als één groot een-stapsbeslissingsprobleem. Als voorbeeld dient het volgende investeringsprobleem:

*voorbeeld 5: een investeringsprobleem*
*definitie*

| | | |
|---|---|---|
| $U$ | = | nutsfunctie |
| $O(I)$ | = | concave opbrengstfunctie |
| $I(T)$ | = | investering in periode T |
| $r$ | = | marktrente |
| $W_0$ | = | beschikbaar vermogen |

*model*

(16) $$\max_{I} U(I(0),\ I(1)) = \sum_{T=0}^{1} O(I(T))/(1+i)^T$$

(17) $$\text{o.d.v. } W_0 - I(0) - I(1)/(1+r) = 0$$

*toelichting*
(16) De onderneming maximaliseert het nut van de achtereenvolgende investeringen, te schrijven als de contante waarde van de opbrengsten.
(17) Budgetvergelijking met als uiterste mogelijkheden het gehele vermogen in periode T=0 te investeren of het met de marktrente aangegroeide vermogen volledig in periode T=1 aan te wenden.

*oplossing*
Gezien de aard van het probleem kan gebruik worden gemaakt van de multiplicatorenmethode van Lagrange. De te optimaliseren Lagrange-functie wordt:

(18) $$\mathbb{L} = U(I(0), I(1)) + \lambda[W_0 - I(0) - I(1)/(1+r)]$$

Uit de noodzakelijke voorwaarden kan worden afgeleid dat de optimale oplossing moet voldoen aan:

(19) $$\frac{\delta U}{\delta I(0)} \Big/ \frac{\delta U}{\delta I(1)} = (1+r) \text{ en } \lambda = \frac{\delta U}{\delta I(0)}$$

De investeringen moeten zo worden gekozen dat de verhouding tussen de marginale bijdragen wordt vastgelegd door de marktrente. De waarde van de Lagrange parameter λ geeft de stijging van de doelstelling weer, indien één eenheid vermogen extra ter beschikking zou staan.

*dynamische programmering*

Indien in een tijdsbestek meer dan één beslissing moet worden genomen en als deze beslissingen elkaar sterk beïnvloeden, zoals in meerstapsbeslissingsproblemen, dan is het niet mogelijk om het probleem voor te stellen als een veelvoud van onderling niet samenhangende éénstapsbelissingsproblemen. In dergelijke gevallen is het gebruik van dynamische programmering efficiënter dan wiskundige programmering. Deze door Bellman (1957) ontwikkelde methode is geschikt voor beslissingsproblemen, die kunnen worden geformuleerd in een model dat kan worden gesplitst in een aantal sequentieel van elkaar afhankelijke deelmodellen. De oplossing wordt niet gegeven in de vorm van een beslissing, zoals bij wiskundige programmering, maar in de vorm van een beslissingsfunctie.

Zeer kenmerkend voor de dynamische programmering is de oplossingsmethodiek, die is gebaseerd op het volgende optimaliteitsprincipe:

een rij optimale belissingen heeft de eigenschap dat welke de eerste beslissing ook is de overige beslissingen optimaal moeten zijn in relatie tot de uit de eerste beslissing resulterende toestand.

Dit optimaliteitsprincipe heeft tot gevolg dat in eerste instantie de als laatste te nemen beslissing wordt geoptimaliseerd met behulp van een éénstapsbeslissingsmodel. De optimale laatste beslissing kan worden uitgedrukt als een functie van de toestand waarin het systeem verkeert op het moment dat die beslissing moet worden genomen. Volgens dit principe gaan we terug in de tijd en leiden ook voor alle voorafgaande beslissingen dergelijke voorschriften af, die gegeven de toestand van het systeem aangeven welke beslissing optimaal is. Dit gaat door totdat de eerste beslissing moet worden bepaald als functie van een gegeven uitgangspunt, waarna de volledige optimale oplossing kan worden vastgelegd.

Besliskundig gezien impliceert het oplossen van een z-stapsbeslissingsprobleem het ontbinden ervan in z van elkaar afhankelijke beslissingsproblemen die recursief worden opgelost als functie van een willekeurige toestand van het systeem. Wiskundig gezien worden z functionaalvergelijkingen recursief opgelost:

*definitie*

| | | |
|---|---|---|
| $X(T)$ | = | toestand van het systeem op moment dat beslissing T moet worden genomen |
| $U(T)$ | = | optimale beslissing T |
| $g_T(\,)$ | = | opbrengst beslissing T |
| $f_T(\,)$ | = | optimale opbrengst vanaf beslissing T |

We kunnen nu voor alle T de optimale beslissing U(T) bepalen met behulp van

$$f_T(X(T)) \; = \; \max g_T(X(T),\, U(T)) + f_{T+1}(X(T+1)).$$

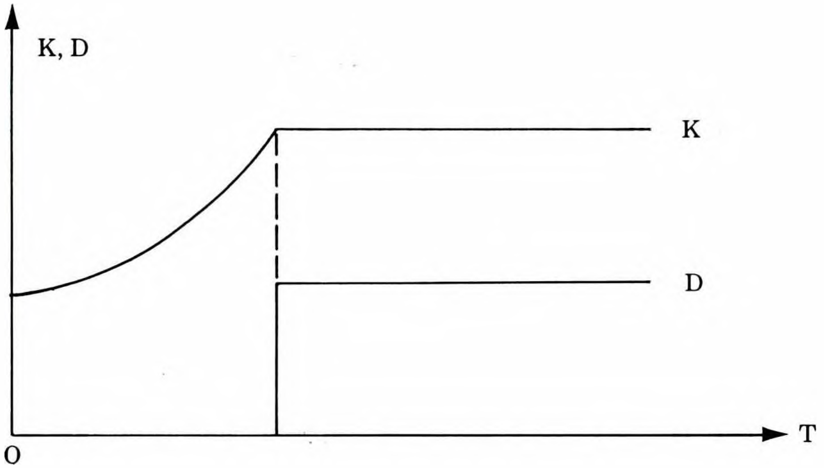
Bij de laatste beslissing z vervalt de uitdrukking $f_{z+1}f(X(z+1))$ terwijl bij de eerste beslissing op T=O, de toestandsvariabele is gegeven: $(X(O) = X_0)$.

Dynamische programmering wordt vooral gebruikt voor het oplossen van discrete besturingsproblemen.

*variatierekening en optimal control*
Zoals we in voorbeeld 3 hebben gezien is het mogelijk een optimaal besturingsprobleem weer te geven in een continu model. Hoewel de dynamische programmering geschikt is te maken voor het oplossen van continue problemen, wordt in dergelijke gevallen toch de voorkeur gegeven aan andere methoden, zoals de variatierekening en 'optimal control'. In sommige gevallen kunnen dan niet alleen numerieke, maar ook analytische oplossingen worden gevonden. Bovendien kunnen randvoorwaarden worden opgenomen.
Reeds in de twintiger jaren werd de variatierekening toegepast op economische problemen. De gebruiksmogelijkheden waren in die jaren echter beperkt door het ontbreken van mogelijkheden om voorwaarden op te leggen op de toestand- en stuurvariabelen. Een oplossing voor dit probleem werd in het midden van de vijftiger jaren gevonden door de russische wiskundige Pontryagin. In 1962 presenteerde hij het bekende 'maximum principe', dat op de dag van vandaag nog steeds een belangrijke bouwsteen vormt van de 'optimal control theory'. De variatierekening en 'optimal control' zijn in essentie eenzelfde methode en het is daarom niet verwonderlijk dat men in staat is geweest de variatierekening zodanig uit te breiden, dat deze thans ook geschikt is voor toepassing op modellen met randvoorwaarden. Ondanks deze uitbreiding geniet 'optimal control' toch de voorkeur bij vele bedrijfseconomische toepassingen.
Het oplossingsconcept van optimal control bevat een aantal kenmerken die we ook al bij wiskundige en dynamische programmering zijn tegengekomen. Zo maakt het maximum principe gebruik van de zogenaamde Hamiltoniaan functie. De noodzakelijke voorwaarden die aan deze functie worden opgelegd vertonen veel overeenkomst met de Kuhn-Tucker-voorwaarden van de convexe programmering. Nevenvoorwaarden worden opgenomen met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange, terwijl het maximum principe kan worden afgeleid met behulp van het optimaliteitsbeginsel van Bellman.
Het basisidee van dynamisch programmeren vinden we ook terug bij de oplossingsmethode van Van Loon (1983) om de optimale bewegingspatronen van de stuur- en toestandvariabelen gedurende de gehele planperiode af te leiden. Uitgaande van de algemene voorwaarden voor een optimale oplossing onderscheidt hij actieve en niet-actieve randvoorwaarden. Iedere combinatie karakteriseert een bepaald ontwikkelingspad. Afhankelijk van de actieve randvoorwaarden wordt het systeem gestuurd. Na verloop van tijd is een randvoorwaarde niet meer beperkend en ontstaat er een andere beperking en daarmee een ander pad. Deze paden kunnen nu worden gekoppeld tot één ontwikkelingspatroon. Van Loon gaat hierbij allereerst op zoek naar paden, die op het einde van de planperiode toegelaten zijn om vervolgens mogelijke voorafgaande paden op te sporen. Dit teruguitwerkend proces herhaalt zich totdat geen enkel voorafgaand pad kan worden gevonden. Tenslotte wordt gecontroleerd of het laatst gevonden pad kan voldoen

aan de startwaarden van het systeem: het gehele ontwikkelingspatroon is nu een feit.
Zeer illustratieve voorbeelden kunnen worden gevonden in de financierings- en groeitheorie [zie Van Loon & Verheyen (1984)]. We geven hier als voorbeeld de oplossing van de dynamische variant van het model van Gordon.

*voorbeeld 3 (vervolg): dynamische variant van Gordon*




*toelichting*
In het begin van de ontwikkeling is de marginale rentabiliteit hoog, zodat het verstandig is alle winst in te houden en te gebruiken ter financiering van nieuwe investeringen, zodat de dividenduitkeringen in de toekomst hoger zullen uitvallen. De inhoudingsfractie is maximaal: $b(T)=1$. Door de aanname van afnemende meeropbrengsten zal het rendement bij uitbreiding van de kapitaalgoederenvoorraad dalen. Dit groeiproces gaat derhalve door totdat de marginale opbrengst van een uitbreidingsinvestering gelijk is aan de tijdsvoorkeurvoet van de aandeelhouders. Vanaf dat moment vinden er alleen vervangingsinvesteringen plaats en wordt alle overige winst uitgekeerd: de inhoudingsfractie is minimaal.

Aan het slot van deze paragraaf nog enige literatuurverwijzingen naar theoretische inleidingen. Tapiero (1978) vergelijkt de oplossingsconcepten dynamische programmering, variatierekening en optimal control, zowel voor discrete als continue modellen. Uitvoerige inleidingen en toepassingsmogelijkheden kunnen worden gevonden in Kamien & Schwartz (1981) en Sethi & Thompson (1981), terwijl Seierstad & Sydsaeter (1977) voldoende voorwaarden analyseren om tot optimale oplossingen te komen. Intriligator (1971) tenslotte geeft een overzicht van optimaliseringstechnieken.

## 4. Dynamische modellen binnen de bedrijfseconomische theorie

Vele aspecten van het gedrag van/binnen de onderneming zijn reeds of

worden thans in een dynamisch theoretisch kader bestudeerd. Bij de oplossing van de modellen wordt veelal gebruik gemaakt van 'optimal control' - technieken.
In dit artikel hebben wij al enkele eenvoudige voorbeelden gegeven. Zo kan het dynamische model van Gordon worden beschouwd als voorloper van de financierings- en groeimodellen, die thans veel belangstelling genieten. De doelfunctie van deze modellen luidt veelal in termen van maximalisatie van de winstuitkeringen aan huidige aandeelhouders. Het resultaat is een fasengewijze groei, waarbij de verhoudingen tussen marginale rentabiliteit, rente en tijdsvoorkeurvoet een belangrijke rol spelen. De optimale politiek houdt een continu proces in tussen eigen en vreemd vermogen, dividend en winstinhouding, groei en consolidatie. Een overzicht van dit soort modellen wordt gegeven door Van Loon & Verheyen (1984).
De mutaties in produktie en/of produktiecapaciteit brengen ook veranderingen met zich mee in de personele bezetting, welke op hun beurt gepaard gaan met aanpassingskosten. De factor arbeid is derhalve niet vrij en kostenloos inzetbaar. Om deze reden bepalen Lesourne & Leban (1980) met behulp van 'optimal control' simultaan het optimale investerings- en personeelsbezettingsgedrag van een winstmaximaliserende onderneming.
Latere studies betrekken bovendien de loonvorming in deze analyse of gaan de gevolgen na in een model van arbeiderszelfbestuur.
Een van de bekendste toepassingen binnen de bedrijfseconomie wordt gevonden in de marketing. De rol van het tijdsaspect met betrekking tot huidige advertentie-uitgaven en mogelijke additionele verkopen in de toekomst komt in deze modellen goed tot uitdrukking. In het algemeen kunnen we twee groepen van marketingmodellen onderscheiden: 'advertising capital models' en 'sales advertising response models'. Eerstgenoemde modellen zijn van het Nerlow-Arrow type en vatten marketing-uitgaven op als investeringen, die een accumulerende goodwill veroorzaken. In andere modellen worden de marketing-uitgaven direct verbonden met verkoopmogelijkheden aan potentiële nieuwe klanten. Sethi (1977) heeft een goed overzichtsartikel geschreven, waarin beide modellen aan bod komen.
Voorbeeld 4 in dit artikel behoort tot de produktie-voorraad-theorie. Doel is een zodanige planning van produktie en voorraad dat gegeven een vraagfunctie de kosten van voorraad en neen-verkopen minimaal zijn over de in ogenschouw genomen planperiode. In recente artikelen wordt ook de verkoopprijs als stuurvariabele van de vraag/afzetfunctie meegenomen en worden voorraadkosten niet homogeen lineair verondersteld [Feichtinger & Hartl (1983)].
Naast deze aandachtsgebieden wordt dynamische optimalisering nog op tal van andere economische problemen toegepast. Volledigheidshalve noemen we de onderhoud- en vervangingsmodellen van duurzame produktiemiddelen, transportmodellen, aanwending van hulpstoffen zoals delfstoffen, en 'last but not least' kasvoorraadmodellen. De geïnteresseerde lezer vindt in Feichtinger (1982a) een uitgebreid overzicht.

## 5. Differentiaalspelen

De aangegeven optimale besturingsproblemen veronderstellen één beslisser. Binnen de economie bestaan vele situaties, waarbij de toestand van het systeem wordt beïnvloed door sturingen van meerdere beslissers. We kunnen hierbij denken aan de concurrentie tussen verschillende ondernemingen, welke op één markt opereren.
Een methode om dit soort problemen het hoofd te bieden is de theorie der differentiaalspelen. Deze theorie kan worden beschouwd als een kind van de ouders optimale besturingstheorie en speltheorie en heeft daarvan dan ook vele karaktertrekken overgenomen. In onderstaande figuur is de plaats van de differentiaalspelen aangegeven.

| | *één beslisser* | *meer beslissers* |
|---|---|---|
| statisch | eindige dimensionele optimalisatietheorie | speltheorie |
| dynamisch | optimale besturingstheorie | theorie der differentiaalspelen |

*De plaats van de theorie der differentiaalspelen [ontleend aan Olsder (1977)].*

De theorie der differentiaalspelen is vrijwel gelijktijdig met, doch onafhankelijk van, de optimale besturingstheorie ontwikkeld door Isaacs (1965). De doorbraak binnen de bedrijfseconomische theorie is er echter een van de laatste jaren. De oorzaak hiervan is naar alle waarschijnlijkheid gelegen in de moeilijkheidsgraad en complexiteit van de oplossingsprocedures.
Binnen de theorie kunnen we onderscheid maken tussen twee-persoons-spelen en meer-persoons-spelen. Deze categorieën kunnen weer worden onderscheiden in nulsomspelen en niet-nulsomspelen. Voor nulsomspelen geldt dat de som van de criteria van de verschillende spelers onder alle omstandigheden een constante is, dat wil zeggen onafhankelijk is van de gebruikte besturingen.
Een differentiaalspel kent verschillende informatiestructuren. In het algemeen zal een speler alle ter beschikking staande informatie willen gebruiken om tot een zo goed mogelijke keuze van zijn sturing te komen. Heeft hij alleen de tijd als informatie, dan spreekt men van een ‘open-loop’-besturing; kent hij bovendien de tegenwoordige toestand van het systeem, dan spreekt men van een ‘closed-loop’-besturing.
Tenslotte kan het spel op verschillende manieren worden gespeeld. Indien de belangen van de spelers gelijk gericht zijn, is er sprake van een coöperatief spel en kan het Pareto-oplossingsconcept worden toegepast. Bij tegenstrijdige belangen hebben we te maken met een non-coöperatief spel en komt in eerste instantie het Nash-concept in aanmerking. Indien de spelers echter niet over dezelfde informatie of stuurmogelijkheden beschikken, kan het Stackelberg-concept van toepassing zijn. Dergelijke gevallen worden ook wel aangeduid als ‘leider-volger’ problemen.
De toepassingen van differentiaalspelen op bedrijfseconomische problemen komen grotendeels overeen met die van de optimale besturingstheorie. De

marketing neemt ook hier een belangrijke plaats in, getuige het overzichtsartikel op dit gebied door Jørgensen (1982). Ook duopoliemodellen van onder andere Thépot (1983) genieten veel belangstelling. Hierbij trachten twee ondernemingen middels sturing van prijs, investeringen en advertentie-uitgaven de verkoop van hun produkten, gegeven een conjuncturele ontwikkeling te maximaliseren. Het moge duidelijk zijn dat de afzet van een onderneming ook afhankelijk is van de politiek van de concurrentie.
Een overzicht van vele toepassingsmogelijkheden van de theorie der differentiaalspelen binnen de bedrijfseconomie wordt gegeven door Feichtinger & Jørgensen (1983). Een zeer leesbare theoretische inleiding is geschreven door Olsder (1977), terwijl in Basar & Olsder (1982) een goed handboek wordt gevonden.

## 6. Slotbeschouwing

We hebben gepoogd een indruk te geven van de mogelijkheden om bedrijfseconomische problemen in een dynamische context te bestuderen. Meer pretenderen we niet, daar het aantal varianten en toepassingsmogelijkheden schier onuitputtelijk lijkt. Zo hebben we volledig afgezien van de stochastische besturingsmodellen. Het zal geenszins verwondering wekken dat ook binnen de dynamische modellenbouw de belangstelling voor modellen onder onzekerheid groot is. Deze stochastische varianten zijn echter verre van eenvoudig en de kinderschoenen nog niet volledig ontgroeid. Een goede inleiding wordt gegeven door Tapiero (1977).
Teneinde door de bomen het bos nog enigszins te kunnen zien, hebben we de literatuurverwijzing beperkt tot handboeken en (overzicht)artikelen, die op hun beurt verwijzen naar een zeer groot aantal eerdere publicaties. We kunnen hieraan nog toevoegen twee verzamelbundels van Bensoussan, Kleindorfer & Tapiero (1978) en Feichtinger (1982b), waarin verscheidene economische toepassingen worden gepresenteerd. Binnenkort zal een tweede bundel onder redactie van Feichtinger verschijnen, waarin opgenomen de proceedings van de 'second Viennese workshop on economic applications of control theory' te Wenen.
Hoewel de praktische waarde van optimal control en aanverwante technieken moet nog worden bewezen, is de ontwikkeling vanuit theoretisch oogpunt zeer interessant. De bedrijfseconomie is in beweging.

Noten

*1 Dit artikel is tot stand gekomen dankzij financiële steun van het Samenwerkingsorgaan Katholieke Hogeschool Tilburg en Technische Hogeschool Eindhoven.*
*De auteur is veel dank verschuldigd aan Prof. dr. P. A. Verheyen en Prof. dr. P. J. J. M. van Loon voor hun waardevol commentaar op eerdere versies.*

## Literatuur


BASAR T. & G. J. OLSDER, 1982, Dynamic Noncooperative Game Theory (Academic Press, New York).
BELLMAN R., 1957, Dynamic Programming (Princeton University Press, Princeton).
BENSOUSSAN A., P. R. KLEINDORFER & Ch. S. TAPIERO, 1978, Applied Optimal Control (North Holland, Amsterdam).
FEICHTINGER G., 1982a, Anwendungen des Maximum-Prinzips im Operations Reserach, Teil 1 und 2, OR Spektrum 4, pp. 171-190 en 195-212.
FEICHTINGER G., 1982b, Optimal Control Theory and Economic Applications (North Holland, Amsterdam).
FEICHTINGER G. & R. HARTL, 1983, Optimal pricing and production in an inventory model, paper workshop on the dynamics of the firm (EIASM, Brussel).
FEICHTINGER G. & S. JØRGENSEN, 1983, Differential games models in management science, European Journal of Operational Research 14, pp. 137-155.
INTRILIGATOR M.D., 1971, Mathematical Optimization and Economic Theory, (Prentice Hall, Englewood Cliffs).
ISAACS R., 1965, Differential games (Wiley, New York).
JØRGENSEN S., 1982, A survey of some differential games in advertising, Journal of Economic Dynamics and Control 4, pp. 341-370.
KAMIEN M. I. & N. L. SCHWARTZ, 1981, Dynamic Optimization, the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management (North Holland, New York).
LESOURNE J. & R. LEBAN, 1980, The firm's investment and employment policy through a business cycle, European Economic Review 13, pp. 43-80.
LOON P. J. J. M. VAN, 1983, A Dynamic Theory of the Firm: Production, Finance and Investment (Springer, Berlijn).
LOON P. J. J. M. VAN & P. A. VERHEYEN, 1984, Groeifasen in bedrijven, Maandblad voor Accountancy en bedrijfshuishoudkunde.
OLSDER G.J. 1977, De theorie der differentiaalspelen en haar toepassingen (Mathematisch Centrum, Amsterdam).
PONTRYAGIN L., 1962, The Mathematical Theory of Optimal Processes (Wiley, New York).
SEIERSTAD A. & K. SYDSAETER, 1977, Sufficiency conditions in optimal control theory, International Economic Review 18, pp. 367-391.
SETHI S.P., 1977, Dynamic optimal control models in advertising: a survey, Siam Review 19, pp. 685-725.
SETHI S. P. & G. L. THOMPSON, 1981, Optimal Control Theory (Martinus Nijhoff, Boston).
TAPIERO CH.S., 1977, Managerial Planning: an Optimal and Stochastic Control Approach, 2 vol, (Gordon and Breach, New York).
TAPIERO CH.S., 1978, Time, dynamics and the process of management modelling, TIMS studies in Management Science 9, pp. 7-31.
THEPOT J., 1983, Marketing and investment policies of duopolists in a growing industry, Journal of Economic Dynamics and Control 5.
VERHEYEN P.A., 1976, Een dynamische versie van het model van Gordon, in: Geld en onderneming, opstellen aangeboden aan Prof. dr. C. F. Scheffer (Stenfert Kroese, Leiden), pp. 329-340.