

WISKUNDIGE MARKETINGMODELLEN

(deel II: Een overzicht)

door Dr. P. S. H. Leeftang

3 Beschrijvende modellen

Beschrijvende modellen hebben tot doel het *mechanisme* van het koopproces van consumenten te beschrijven. Deze beschrijving kan plaats vinden op twee niveaus, nl.:

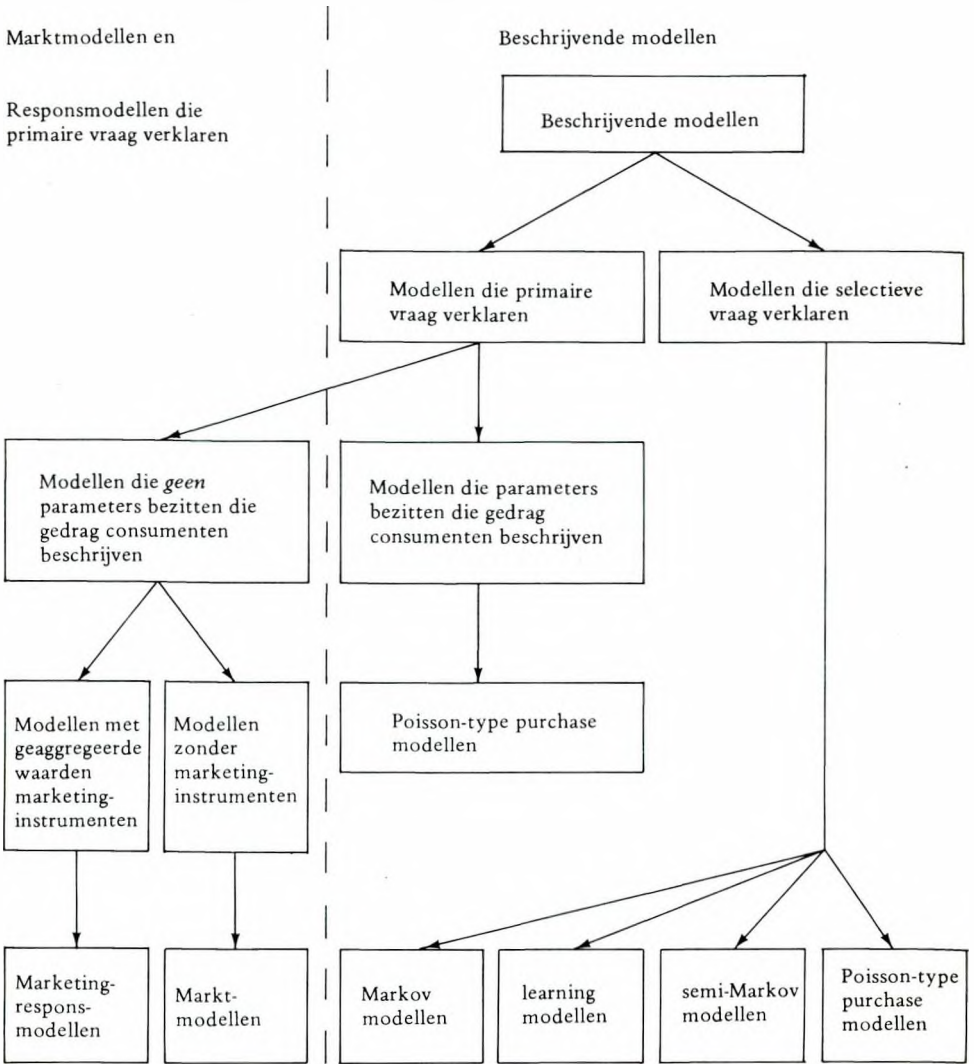
- 1 Verklaring van het totaal aantal verkochte eenheden van het produkt (primaire vraag).
- 2 Verklaring van het totaal aantal verkochte eenheden van een merk (selectieve vraag).

In de literatuur (bijv. Klein, Lansing, 1955; v. d. Zwan, 1968) kan men een aantal modellen tegenkomen die de primaire vraag trachten te verklaren door middel van een aantal toestands- of exogene variabelen (verklarende variabelen die de onderneming niet kan beheersen), zoals nationaal inkomen per hoofd van de bevolking, regionale en demografische kenmerken, verwachtingen over het prijsverloop, etc. In navolging van Aeyelts Averink (1970) zullen wij deze modellen die *geen* marketinginstrumenten als verklarende variabelen bezitten, *marktmodellen* noemen. Modellen die de primaire vraag trachten te verklaren door middel van „geaggregeerde marketingvariabelen” zoals totale reclame-uitgaven m.b.t. het produkt, gemiddelde prijs van het produkt en toestandsvariabelen zullen wij conform paragraaf 2, marketing-responsmodellen noemen.

Aangezien in marktmodellen geen causale relatie gespecificeerd wordt tussen marketinginstrumenten en marketingdoelstellingsmaatstaven en deze modellen evenmin het mechanisme van het aankoopproces van consumenten beschrijven, zullen wij afzien van een verdere behandeling van deze modellen. Evenzo zullen wij afzien van een bespreking van modellen die het gedrag van consumenten beschrijven zoals die ontwikkeld zijn in de economische theorie van het consumentengedrag. Deze modellen kunnen een impliciete basis vormen voor responsrelaties tussen bijv. prijs en verkochte hoeveelheid. Voorbeelden van dergelijke relaties kan men vinden in Armington (1969), Verdoorn (1964, pp. 238-241 en pp. 279-282), Verdoorn, Schwartz (1972). Voor een bijzonder systematisch uitgebreid overzicht van deze modellen verwijzen wij naar Brown en Deaton (1972).

Beschrijvende modellen kunnen worden geïnclassificeerd naar de assumpties die aan de diverse modellen ten grondslag liggen. Dit leidt tot een indeling in Markov modellen, semi-Markov modellen, learning modellen en Poisson-type purchase modellen. Daarnaast kunnen zij geïnclassificeerd worden naar het vraagniveau (primaire vraag - selectieve vraag) waarop zij betrekking hebben. De in deze paragraaf geïntroduceerde modellen kunnen met behulp van figuur 2 wederom in kaart worden gebracht:

Figuur 2 Beschrijvende modellen en „verwante” modellen



Wij zullen achtereenvolgens de Markov modellen en learning modellen bespreken. De semi-Markov modellen en de Poisson-type purchase modellen, waarbij de laatste modellen zoals uit figuur 2 blijkt zowel gehanteerd worden om de primaire vraag als de selectieve vraag te verklaren, zullen in dit artikel niet uitgebreid besproken kunnen worden, omdat zij een aanzienlijke statistische voorkennis van de lezer veronderstellen.

Markov modellen

Markov modellen en learning modellen zijn gebaseerd op de veronderstelling dat elke consument één en slechts één eenheid van een produkt per tijds-

periode $t = 0, 1, 2, \dots, T$ aanschafft. Op deze veronderstelling zullen wij in het onderstaande nog terugkomen.

Markov modellen en learning modellen beschrijven op een gestileerde wijze het gedrag van een kansvariabele X_t in de tijd $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Dit betekent dat deze modellen zgn. stochastische processen beschrijven. De kansvariabele X_t kan de waarde $j = 1, \dots, n$ aannemen. Neemt de kansvariabele X_t de waarde j aan dan betekent dit dat een consument of een groep consumenten merk j koopt op het tijdstip t . De waarschijnlijkheid dat een consument merk j koopt: $P\{X_t = j\}$ ($= \pi_{jt}$) kan al dan niet afhankelijk zijn van de merkkeuze in voorafgaande perioden. Wanneer $P\{X_t = j\}$ afhankelijk is van het merk dat in de voorafgaande periode(n) gekocht is dan spreken wij over zgn. eerste (of hogere) orde Markov ketens en noemen wij deze eigenschap de eerste (of hogere) orde Markov eigenschap.

Zijn de $P\{X_t = j\}$ *onafhankelijk* van de keuze van een merk van een zeker produkt in de voorafgaande periode dan spreken wij over Markov ketens van de „nulde orde”.

De genoemde eerste orde Markov ketens en nulde orde Markov ketens vormen de basis van respectievelijk de eerste orde Markov modellen en de nulde orde Markov modellen. De eerste orde Markov eigenschap gaat voor een belangrijk aantal produkten op. Dit is niet zo vreemd, omdat men bij een goed dat men regelmatig aanschafft, veelal nagaat, welk merk men de vorige keer gekocht heeft, hoe dit merk bevallen is en welke voor- en nadelen dit merk bezit vergeleken met een willekeurig ander merk. Die voor- en nadelen en de veranderingen in die voor- en nadelen worden geïnduceerd door de hantering van de marketinginstrumenten van de diverse producenten. De wijze waarop de merken „promoted” worden, hun prijzen, de wijze waarop zij gedistribueerd worden, de uitvoering en kwaliteit, al deze instrumenten zullen bepalen of men in periode t merk j zal gaan aanschaffen, gegeven dat men merk i in periode $t-1$ kocht. Op deze beïnvloeding zullen wij bij de bespreking van de responsmodellen nader ingaan.

Wanneer we de waarschijnlijkheid dat een consument merk j koopt op tijdstip t onder de voorwaarde dat hij merk i kocht op tijdstip $t-1$ weergeven door: $P\{X_t = j | X_{t-1} = i\}$ ($= p_{ij_t}$), dan kunnen we de *eerste orde Markov eigenschap* als volgt weergeven:

$$P\{X_t = j | X_{t-1} = i\} = P\{X_t = j | X_{t-1} = i, X_{t-2} = k, \dots, X_{t-n} = \ell\} = p_{ij_t}$$

Wanneer voor een stochastisch proces de eerste orde Markov eigenschap opgaat betekent dit dus dat de kans dat merk j gekozen wordt op het tijdstip t afhankelijk is van de merkkeuze (i in dit geval) op $t-1$ en niet van de merkkeuze in perioden die voor $t-1$ liggen: $t-2, t-3$ etc.

De hierboven genoemde voorwaardelijke waarschijnlijkheden worden *overgangswaarschijnlijkheden* genoemd. Deze voorwaardelijke waarschijnlijkheden zijn d.m.v. de volgende relatie aan de waarschijnlijkheden $P\{X_t = j\}$, $j = 1, \dots, n$ gerelateerd:

$$(1) P[X_t = j] = \sum_{i=1}^n P[X_t = j | X_{t-1} = i] P[X_{t-1} = i]$$

of:

$$\pi_{jt} = \sum_{i=1}^n p_{ij_t} \pi_{i_{t-1}} \text{ voor elke } j = 1, \dots, n.^4)$$

* Relatie (1) heeft betrekking op waarschijnlijkheden (π_{jt}) en overgangswaarschijnlijkheden (p_{ij_t}) van individuen. De relatie kan echter ook betrokken worden op een groep van consumenten (= een aggregaat).

Dit kan op twee manieren, afhankelijk van de wijze waarop men de overgangswaarschijnlijkheden interpreteert:

1 Uitgaande van relatie (1) kan men deze voor individuele consumenten aggregeren (zie: Howard, 1963). De overgangswaarschijnlijkheden kunnen in deze situatie als volgt geïnterpreteerd worden:

Een overgangswaarschijnlijkheid $p_{ij_t} = 1/3$ betekent dat *iedere* consument in de populatie van „geaggregeerde” consumenten die merk i in periode $t-1$ gebruiken, een kans van $1/3$ bezit om merk j te gaan gebruiken in periode t .

2 Men kan relatie (1) ook interpreteren als een balansvergelijking die aangeeft hoe het marktaandeel van merk j in periode t (π_{jt}) samengesteld is uit de marktaandelen van merk $i = 1, \dots, n$ in periode $t-1$. De „overgangswaarschijnlijkheden” geven dan de fracties consumenten aan die van merk $i, i = 1, \dots, n$ in periode $t-1$ naar merk j overgegaan zijn. Een overgangswaarschijnlijkheid: $p_{ij_t} = 1/3$ betekent in deze interpretatie dat $1/3$ deel van de consumenten die i gebruiken in periode $t-1$, merk j gaan gebruiken in periode t . *

De overgangswaarschijnlijkheden p_{ij_t} kunnen op verschillende wijzen geschat worden. De meest voor de hand liggende methode is die waarbij de p_{ij_t} geschat worden door middel van de volgende vergelijking:

$$\hat{p}_{ij_t} = \frac{S_{ij_t}}{\sum_{j=1}^n S_{ij_t}}$$

waarbij S_{ij_t} het aantal aankopen van merk i in periode $t-1$, dat verschoven is naar merk j in periode t en \hat{p}_{ij_t} de geschatte overgangswaarschijnlijkheid is.

* Markov modellen, die gebaseerd zijn op de eerste orde Markov eigenschap, kunnen nog diverse andere eigenschappen bezitten. Het is mogelijk de verzameling eerste orde Markov modellen in te delen conform deze eigenschappen:

- individueel dan wel geaggregeerd (niveau van beschrijving);
- stationair dan wel niet-stationair zijn van de overgangswaarschijnlijkheden;

⁴⁾ De gedeelten van dit artikel, die tussen sterretjes (*) zijn geplaatst, doen een beroep op aanzienlijke kennis van wiskundige en statistische methoden.

- heterogeniteit dan wel homogeniteit van de populatie consumenten, die geaggregeerd wordt. Met homogeniteit van de populatie consumenten bedoelen wij dat alle consumenten dezelfde π_{jt} , p_{ijt} , $i, j = 1, \dots, n$ bezitten. Bij een heterogene populatie van consumenten verschillen de waarden van deze onvoorwaardelijke en voorwaardelijke waarschijnlijkheden per consument. Morrison (1966) bijv. ontwikkelde een Markov model dat de heterogeniteitseigenschap bezit. *

Zoals in het voorgaande werd gesteld, kunnen wij naast Markov modellen die gebaseerd zijn op een eerste orde Markov proces, Markov modellen gebaseerd op een nulde orde Markov proces onderscheiden. In een model waarin van dit proces sprake is, is de waarschijnlijkheid dat een consument merk j in periode t kiest, onafhankelijk van de merkkeuze in periode $t-1$. (Keuze is dus afhankelijk van keus in „nul” voorafgaande perioden.) Dat wil zeggen:

$$P[X_t = j \mid X_{t-1} = i] \stackrel{\text{def}}{=} P[X_t = j] \text{ voor elke } j = 1, \dots, n.$$

* Of een consument handelt conform een eerste dan wel een nulde orde Markov proces is sterk afhankelijk van het gekochte produkt. Verder is het van belang op te merken, dat men voor een aantal produkten op het *individuele* niveau van merkkeuze een nulde orde proces kan waarnemen, terwijl door *aggregatie* van de waarschijnlijkheden waarmee het merk gekozen wordt over een aantal individuen, een eerste orde Markov proces waargenomen kan worden. Met name is bijv. door Frank (1962) onderzocht, dat de aankoop van koffie door individuen plaatsvond conform een nulde orde proces, terwijl de aankopen van koffie van een groep van 800 gezinnen conform een eerste orde proces plaatsvonden. (Zie voor een verklaring van dit verschijnsel: Montgomery, Urban, 1969, pp. 90-91; Leeflang, 1974, pp. 32-33.) *

Ook de nulde orde Markov modellen kunnen de diverse eigenschappen bezitten die hiervoor met betrekking tot de eerste orde Markov modellen werden genoemd. Een nulde orde Markov model dat de heterogeniteitseigenschap bezit, is ontwikkeld door Montgomery (1969).

Wij willen het zojuist gegeven overzicht van Markov modellen besluiten met de volgende beperking van deze modellen te bespreken: Voor alle Markov modellen geldt, dat een consument één en slechts één aankoop van een produkt per periode verricht. Dit kan een bijzonder irrealistische aanname zijn, omdat consumenten gedurende een zekere periode normaliter meer dan één eenheid van een produkt kopen dan wel helemaal niets van het produkt kopen. In de zgn. semi-Markov modellen nu heeft men de fixatie van de tijdsperioden trachten te elimineren op een bijzonder ingenieuze manier (vgl. Howard, 1963).

Learning modellen

De nu te bespreken learning modellen zijn gebaseerd op een zgn. „learning process”; een proces dat door Rewoldt, Scott en Warshaw (1969, p. 53) gedefinieerd wordt als: „any change in behaviour which results from experience or practice in similar situations”.

In learning modellen worden de veranderingen in het gedrag gemeten door veranderingen in de waarschijnlijkheid dat een merk j gekocht wordt. Deze laatste verandering is gerelateerd aan het aantal malen dat het produkt gekocht is. In de learning modellen die door Kuehn (1961, 1962), en Herniter en Howard (1964) ontwikkeld zijn, wordt aangenomen dat:

- 1 elke consument met betrekking tot een merk j een maximale waarschijnlijkheid (U_j) en een minimale waarschijnlijkheid (L_j) bezit om een merk j ($j = 1, \dots, n$) bij een volgende koopgelegenheid aan te schaffen, $0 \leq L_j \leq \pi_{jt} \leq U_j \leq 1$;
- 2 een serie opeenvolgende aankopen van merk j de waarschijnlijkheid dat merk j gekocht zal worden (π_{jt}) zal vergroten, terwijl aankopen die niet betrekking hebben op merk j , π_{jt} zullen doen verminderen.

De relaties van een learning model kunnen als volgt worden weergegeven:

$$(2) \quad P_{ij_t} = \pi_{j_{t-1}} + g(U_j - \pi_{j_{t-1}}) \quad 0 \leq g \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$(3) \quad P_{ij_t} = \pi_{j_{t-1}} - \ell(\pi_{j_{t-1}} - L_j) \quad 0 \leq \ell \leq 1 \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j$$

De vergelijkingen (2) van dit stelsel vergelijkingen worden ook wel „gain operators” genoemd, terwijl de vergelijkingen (3) als „loss operators” bekend staan. Dit omdat een vergelijking zoals (2) aangeeft dat de waarschijnlijkheid dat j gekocht wordt in de periode t toeneemt wanneer j gekocht wordt in $t-1$. Een vergelijking zoals (3) daarentegen geeft de vermindering van de waarschijnlijkheid dat j gekocht wordt weer als gevolg van het feit dat j niet gekocht wordt in periode $t-1$.

Wanneer wij zoals Herniter en Howard afgeleid hebben: $g = \ell$ substitueren in de vergelijkingen (3) dan kunnen de volgende gereduceerde vormvergelijkingen worden afgeleid:

$$(4) \quad \pi_{jt} = (1 - g + gU_j) \pi_{j_{t-1}} + gL_j(1 - \pi_{j_{t-1}}) \quad j = 1, \dots, n$$

Deze vergelijkingen lijken sterk op de vergelijkingen van een eerste orde Markov model. Dit wordt o.m. veroorzaakt door het feit dat wij slechts de tijdsperioden $t-1$ en t beschouwen. Het is evenwel ook mogelijk om π_{jt} als een functie van meer tijdsperioden te specificeren. (zie o.m.: Massy, Montgomery, Morrison, 1970, hoofdstuk 5; Wierenga 1974, hoofdstuk 5.) Learning modellen die betrekking hebben op twee tijdsperioden $t-1$ en t verschillen o.m. ook van Markov modellen omdat steeds geldt dat $p_{ij_t} \geq p_{ij_{t-1}}$, hetgeen door de hierboven gespecificeerde assumptie 2 geïnitieerd wordt. Op een aantal andere verschillen willen wij in dit verband niet ingaan.

* *Poisson-type purchase modellen*

Tot slot van deze paragraaf willen wij de Poisson-type purchase modellen verbaal beschrijven. Deze modellen beschrijven het aantal eenheden dat door een individu van een bepaald produkt (primaire vraag) dan wel van een bepaald merk (selectieve vraag) gekocht wordt door middel van een Poisson-verdeling. Door verder te veronderstellen dat het gemiddelde van de Poisson-

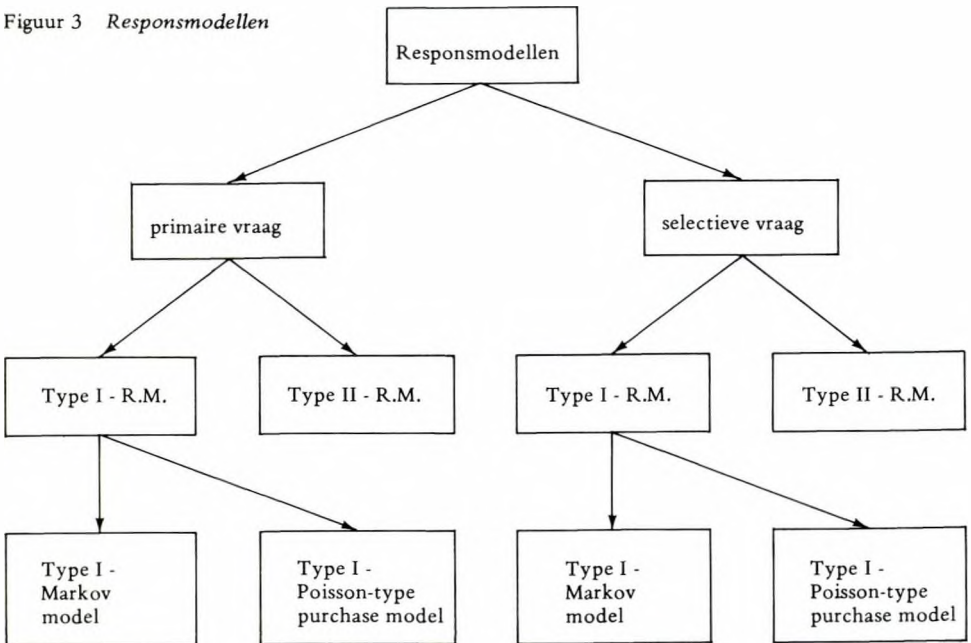
verdeling (een parameter die het gedrag van consumenten beschrijft) verdeeld is over alle individuen in de populatie conform een gamma-verdeling, kan worden aangetoond dat het totaal aantal aankopen van het produkt/merk negatief-binomiaal verdeeld is (zie: Ehrenberg, 1959, 1971; Chatfield, Ehrenberg en Goodhardt, 1966). *

4 Responsmodellen

Responsmodellen hebben tot doel de relatie tussen de hantering van marketinginstrumenten en het resultaat van deze hantering (uit te drukken in een zgn. responsmaatstaf) expliciet te maken. Gezien hetgeen wij in paragraaf 2 opmerkten omtrent de logische opbouw van een model in drie fasen zal het geen verbazing wekken wanneer wij als eis stellen dat een responsmodel expliciet dan wel impliciet gebaseerd moet zijn op een beschrijvend model en dat een optimaleringsmodel expliciet dan wel impliciet gebaseerd moet zijn op zowel een responsmodel als een beschrijvend model.

Zoals in paragraaf 2 uiteen is gezet kennen we uit de literatuur een aantal responsmodellen die op een impliciete wijze gebaseerd zijn op een beschrijvend model. Responsmodellen die op een expliciet geformuleerd beschrijvend model zijn gebaseerd zullen wij Type I-responsmodellen noemen, de overige modellen Type II-responsmodellen. De Type I-responsmodellen kunnen geclassificeerd worden conform het beschrijvend model waarop ze gebaseerd zijn. Daarnaast kunnen we responsmodellen die de primaire vraag trachten te verklaren (zie paragraaf 3) onderscheiden van responsmodellen die de selectieve vraag trachten te verklaren. Wederom zullen wij de zo juist besproken modellen in kaart brengen:

Figuur 3 Responsmodellen



In de responsmodellen die in de literatuur gevonden kunnen worden, kunnen veelal slechts enkele instrumenten onderscheiden worden. De responsmodellen die zich bezighouden met de introductie van een nieuw produkt bevatten als verklarende variabele veelal de tijdseenheid t . Deze variabele kan dan onder meer een aantal marketingvariabelen representeren die *in* de tijd variëren.

In deze paragraaf zullen wij een aantal voorbeelden bespreken van responsmodellen die betrekking hebben op de selectieve vraag. De eerste voorbeelden zijn de reeds in paragraaf 3 aangekondigde Type I - respons Markov modellen waarin men de overgangswaarschijnlijkheden relateert aan de hantering van marketinginstrumenten. Tenslotte zullen wij enkele Type II - responsmodellen de revue laten passeren.

Telser (1962) ontwikkelde een Type I - prijsmodel door te veronderstellen, dat de overgangswaarschijnlijkheden afhankelijk zijn van de prijsverschillen tussen merken 1 en 2. Dit model bevat de volgende vergelijkingen:

$$(1) \pi_{1t} = p_{11t} \pi_{1t-1} + p_{21t} \pi_{2t-1}$$

$$(2) \pi_{2t} = p_{12t} \pi_{1t-1} + p_{22t} \pi_{2t-1}$$

$$(3) p_{12t} = c_{12} + b_{12} (P_{2t} - P_{1t}) + u_{12t}$$

$$(4) p_{22t} = c_{22} + b_{22} (P_{2t} - P_{1t}) + u_{22t}$$

waarbij P_{jt} = prijs voor merk j op tijdstip t , en

$u_{12t} u_{22t}$ = storingstermen.

Zoals in zoveel modellen, die gebaseerd zijn op de eerste orde Markov eigenschap het geval is, representeert in dit model merk 2 „alle overige merken”. Wanneer we p_{12t} en p_{22t} interpreteren als fracties consumenten, en de waarden die p_{12t} , p_{22t} , P_{1t} , P_{2t} in de tijd aannemen bekend zijn, kunnen de onbekende parameters c_{12} , c_{22} , b_{12} en b_{22} d.m.v. regressie bepaald worden. Wanneer deze geschatte waarden in de laatste twee relaties gesubstitueerd worden en deze relaties op hun beurt in relatie (2) gesubstitueerd worden, kan een relatie tussen marktaandeel van merk 2 en de prijzen van merk 1 en merk 2 gevonden worden.

Hartung en Fisher (1965) ontwikkelden eveneens een Type I - respons Markov model waarin de invloed van het aantal distributiepunten op overgangswaarschijnlijkheden geschat wordt. Dit model bevat onder meer de volgende relaties tussen overgangswaarschijnlijkheden en het aantal distributiepunten:

$$P_{11,t} = k_1 \frac{P_t}{O_t + P_t} + u_{11,t}$$

$$P_{12,t} = k_2 \frac{P_t}{O_t + P_t} + u_{12,t}$$

waarbij P_t = het aantal filialen dat merk 1 voert (in dit geval het aantal bezinepompen dat merk 1 voert), en
 O_t = het aantal filialen dat concurrerende merken („alle overige merken”) voert.

Ook door middel van dit model kan op analoge wijze als in het hiervoor geschetste model van Telser de invloed van het aantal filialen op het markt-aandeel worden bepaald. Op de ingenieuze wijze waarop Hartung en Fisher dit bepaalden, willen wij in dit verband niet ingaan; wel willen wij vermelden, dat Leeftang en Koerts (1973a) een model ontwikkelden door middel waarvan de invloed van de meest relevante marketinginstrumenten op de overgangswaarschijnlijkheden in principe bepaald kan worden.

* In de literatuur kunnen naast Type I - responsmodellen die gebaseerd zijn op een eerste orde Markov model ook Type I - responsmodellen gevonden worden die gebaseerd zijn op de zgn. Poisson-type purchase modellen. Een voorbeeld van zo'n model kan gevonden worden in Magee (1953). *

Een groot aantal Type II - responsmodellen bestaat uit één vergelijking die het verband aangeeft tussen een instrument en een responsmaatstaf. Wanneer deze relaties te lineariseren zijn kunnen de coëfficiënten van deze relaties met behulp van regressie gevonden worden. In deze modellen houdt men veelal niet expliciet rekening met de effecten van acties van concurrenten.

Een andere groep modellen, die alle relevante marketinginstrumenten bevatten en waarin bovendien expliciet rekening gehouden wordt met acties van concurrenten zijn de zgn. marktaandeelmodellen van bijv. Lambin (1970, 1972), Cowling, Cubbin (1970) die in dit blad door Aeyelts Averink (1972) besproken zijn. Wij zullen eerst enige voorbeelden van de eerste groep modellen geven. Zo'n voorbeeld is de door Palda (1964) ontwikkelde relatie die het verband tussen het aantal verkochte eenheden produkt (S_t) en de reclame uitgaven in diverse perioden t , $t-1$, $t-2$, . . . , etc. (A_t) in de tijd weergeeft:

$$S_t = \alpha + \beta A_t + \beta A_t + \beta \lambda A_{t-1} + \beta \lambda^2 A_{t-2} + \dots + u_t$$

waarbij u_t = storingsterm, en $0 < \lambda < 1$.

Dit is een zgn. dynamische relatie waarin het (afnemend) effect van reclame-uitgaven op verkopen in de tijd weergegeven wordt. Daarnaast zijn er statische modellen bekend waarin de relatie tussen totale reclame-uitgaven en totale verkopen gespecificeerd wordt.

In een aantal onderzoeken toonden Benjamin en Maitland (1958) bijv. aan dat de relatie tussen het totaalbedrag dat uitgegeven wordt aan adverteren (A) en het totaal aantal personen dat reageert op dit adverteren (R) (te meten door middel van het aantal ingezonden coupons) weergegeven kan worden d.m.v. de volgende relatie:

$R = a \ln A + b + u$ voor: $e^{-b/a} \leq A \leq \infty$.

$R = 0$: elders.

waarbij a en b parameters zijn die geschat moeten worden en u een storings-term is.

In deze relatie wordt rekening gehouden met:

- 1 een zekere *drempelwaarde* die overschreden moet worden teneinde een effect te bewerkstelligen, en
- 2 een afnemende meeropbrengst die optreedt, wanneer de „investeringen” in *advertentie-uitgaven* blijven toenemen.

Benjamin en Maitland vonden in hun experimenten steeds een negatieve waarde voor b , hetgeen een onderstreping is voor de opvatting dat b de drempelwaarde aangeeft.

We mogen de relatie die Benjamin en Maitland afleidden niet tot norm verheffen voor elke relatie tussen advertentie-uitgaven en verkopen. Hun experimenten vonden in een niet-gebruikelijke situatie plaats; een situatie waarin de wijzigingen in de hantering van de andere marketinginstrumenten vrijwel nihil waren. Bovendien werd niet het effect van advertentie-uitgaven op verkopen gemeten, doch het aantal binnenkomende coupons als functie van het bedrag dat aan de verspreiding van deze coupons ten grondslag lag. Desalniettemin kan de bovenstaande relatie een *ruwe* indicatie opleveren omtrent het bedrag dat aan advertentie-uitgaven uitgegeven kan worden.

Alhoewel de relatie onvolledig en ruw is, kan men toch elementen inbouwen die in een niet-kwantitatieve analyse moeilijk geïncorporeerd zouden kunnen worden. Men houdt bijv. rekening met begrippen als drempelwaarde, en afnemende meer-opbrengsten.

Een voorbeeld van een relatie waarin het gedrag van de verkopen van een nieuw produkt (S_t) als functie van tijd (t) wordt weergegeven is relatie (5):

$$(5) \quad S_t = L(1 - a^t) + u_t$$

waarbij L = de limiet voor S_t als $t \rightarrow \infty$, en

a = een parameter die geschat dient te worden, $0 < a < 1$, en

Een hieraan analoog model is de Gompertz-relatie:

$$S_t = A^{B^t} + u_t$$

waarbij A en B = parameters

De bovenstaande relatie kan eenvoudig tot de volgende lineaire relatie getransformeerd worden:

$$\ln \ln S_t = t \ln B + \ln A + v_t$$

waarbij v_t = evenals u_t een storingsterm

die zich in tegenstelling tot relatie (5) in principe leent voor toepassing van regressie. In deze beide relaties is duidelijk een „exponentieel” verloop te herkennen. Dit betekent, dat er steeds een stijging van S_t in de tijd valt te

onderkennen, waarbij in de eerste perioden sprake is van een progressieve en daarna van een degressieve stijging. In de eerste relatie tenslotte is een verzadigingsniveau L geïntroduceerd.

Als voorbeeld van een marktaandeelmodel geven wij één van de relaties die door Lambin (1972) gespecificeerd werden:

$$m_{jt} = \left[\frac{P_t}{P_t + O_t} \right]^\mu \left[\frac{SP_t}{SP_t + SO_t} \right]^\xi \left[\frac{A_{jt}}{\sum_{r=1}^n A_{rt}} \right]^\kappa v_{jt} \quad j = 1, \dots, n$$

- waarbij m_{jt} = marktaandeel merk j in t (benzine merk j in t)
 P_t = aantal service stations dat merk j verkoopt op t
 O_t = aantal service stations dat concurrerende benzine verkoopt op t
 SP_t = aantal „andere” outlets dat merk j verkoopt op t
 SO_t = aantal „andere” outlets dat concurrerende benzine verkoopt op t
 A_{jt} = reclame voor merk j op t , en
 v_{jt} = storingsterm

Andere voorbeelden, behalve de al eerder geciteerde marktaandeelmodellen, van modellen die het effect van meerdere instrumenten op een responsmaatstaf trachten te bepalen, zijn de modellen van Massy, Frank (1965). Het is herhaaldelijk in de praktijk gebleken dat met behulp van deze modellen bijzonder goed de invloed van marketinginstrumenten op marktaandeel te bepalen is. Voor een vergelijking van deze responsmodellen met responsmodellen gebaseerd op een Markov model verwijzen wij naar Leeftang (1974, hoofdstuk 7).

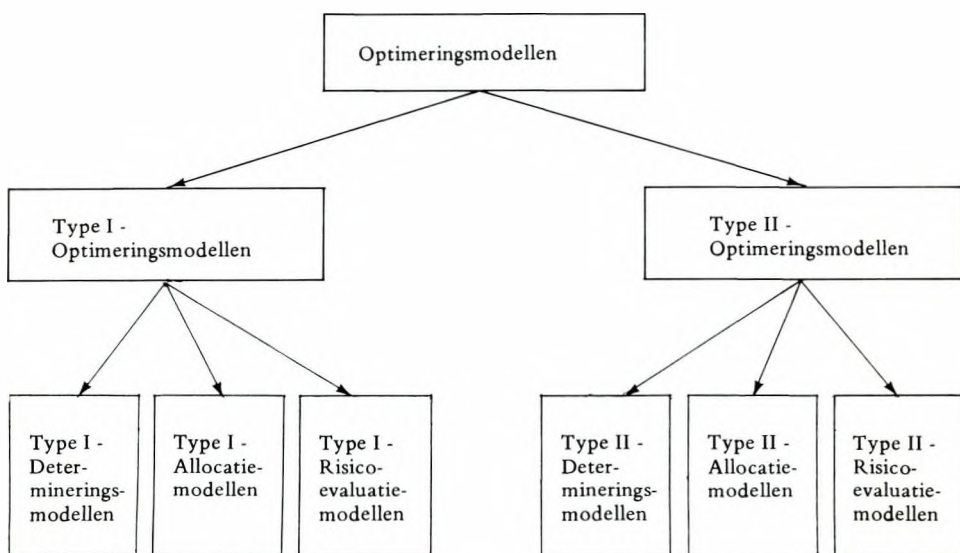
5 Optimeringsmodellen

Optimeringsmodellen hebben tot doel de optimale waarden van de marketinginstrumenten te bepalen. Modellen die op een beschrijvend model gebaseerd zijn, zullen wij Type I - optimeringsmodellen noemen; de overige modellen zullen wij Type II - optimeringsmodellen noemen. Daarnaast kunnen wij optimeringsmodellen indelen naar de wijze waarop de objectfunctie geoptimeerd wordt.

In een aantal modellen gebeurt dit door het alloceren van de waarde die een instrument aanneemt over diverse deelinstrumenten. Deze modellen zullen wij *allocatiemodellen* noemen. In een ander type model wordt de objectfunctie op een andere wijze geoptimeerd en wel door expliciet rekening te houden met het risico dat hantering van de marketinginstrumenten met zich meebrengt. De wijze waarop dit risico in het beslissingsproces wordt betrokken, zal afhangen van de risico-attitude van degene, die een beslissing m.b.t.

de hantering van een marketinginstrument moet nemen. Deze modellen worden *risico-evaluatiemodellen* genoemd. Tenslotte zijn er een aantal optimaliseringsmodellen ontwikkeld die noch tot de verzameling van allocatiemodellen noch tot de verzameling van risico-evaluatiemodellen behoren. Deze modellen worden *determineringsmodellen* genoemd.

Figuur 4 *Optimeringsmodellen*



Alhoewel optimaliseringsmodellen bovendien nog geclassificeerd kunnen worden naar het type beschrijvend model waarop zij gebaseerd zijn en naar modellen waarin wel expliciet rekening gehouden wordt met acties van concurrenten en modellen waarbij dit niet het geval is, zullen wij volstaan met deze classificatie en achtereenvolgens voorbeelden van een determineringsmodel, een allocatiemodel en een risico-evaluatiemodel geven.

Determineringsmodellen

Bekende voorbeelden van Type II - determineringsmodellen zijn de modellen die geruime tijd geleden door Dorfman en Steiner (1959) en Verdoorn (1964, pp. 218-227) ontwikkeld zijn. Met behulp van deze modellen, die slechts impliciet het gedrag van concurrenten beschouwen, is het mogelijk om simultaan de optimale waarden van de marketinginstrumenten te bepalen. Dorfman en Steiner's model bestaat uit de volgende vergelijkingen:

$$(1) W = O - K$$

$$(2) O = p v$$

$$(3) v = f(p, A, x)$$

$$(4) K = v \cdot c(v, x) + A$$

Waarbij $W =$ winst

$O =$ opbrengsten

$K =$ kosten

$p =$ prijs per eenheid

$v =$ afgezette hoeveelheid

$A =$ reclame-uitgaven

$x =$ kwaliteits-index

$c(v, x) =$ variabele kosten per eenheid produkt

Uit (1)–(4) kan de gereduceerde vormvergelijking eenvoudig worden gevonden:

$$(5) W = \{ p - c [f(p, A, x), x] \} f(p, A, x) - A$$

Uit differentiatie van (5) naar p , a , en x en het gelijk stellen van deze uitdrukkingen aan nul kan het zgn. theorema van Dorfman en Steiner gevonden worden:

$$(6) -\frac{p}{v} \frac{\delta v}{\delta p} = p \frac{\delta v}{\delta A} = \frac{\frac{\delta v}{\delta x}}{\frac{\delta c}{\delta x}} \quad \frac{c}{v} \frac{p}{c} = \frac{p}{p - c - v \frac{\delta c}{\delta v}} \quad 5)$$

(Vgl. Lambin, 1970, pp. 29-31.)

Het model van Verdoorn (1964) verschilt in zoverre van het bovenstaande model, dat de reclamekosten (r) als variabele kosten per eenheid worden beschouwd en dat kwaliteitskosten (b) worden beschouwd als de additionele kosten die nodig zijn voor het produceren van een kwaliteit die beter is dan een minimumkwaliteit die te produceren is tegen minimumproduktiekosten per eenheid (k):

$$(7) W = O - K$$

$$(8) O = p v$$

$$(9) v = f(p, b, r,)$$

$$(10) K = v(r + b + k) + C$$

waarbij $C =$ constante kosten

De bij dit model behorende zgn. „pariteit-regel” kan worden vergeleken met het theorema van Dorfman en Steiner:

⁵⁾ De waarden van de variabelen die op deze wijze gevonden worden, leiden alleen tot een maximale W , indien aan de tweede orde voorwaarden voldaan is.

$$(11) - \frac{\epsilon_{vP}}{P} = \frac{\epsilon_{vR}}{R} = \frac{\epsilon_{vB}}{B}$$

waarbij $\epsilon_{vi} = \frac{\delta v}{\delta i} \frac{i}{v}$, $i = p, r, b$.

Andere in de literatuur voorkomende Type II -determineringsmodellen die dezelfde structuur bezitten als de bovenstaande modellen zijn de modellen van Kotler (1964), Kotler (1970) en Lambin (1970). In de laatste twee modellen houdt men, in tegenstelling tot de eerder besproken modellen, expliciet rekening met de effecten van acties van concurrenten. Als voorbeelden van Type I-determineringsmodellen noemen wij tenslotte de modellen van Magee (1953) en Kuehn (1961).

Allocatiemodellen

Tal van voorbeelden van allocatiemodellen kunnen gevonden worden op het terrein van de allocatie van een reclamebudget over media. Alhoewel op dit terrein een aantal geavanceerde modellen ontwikkeld zijn (het Type I-allocatiemodel van Aeyelts Averink, 1968; het Type II - allocatiemodel van Little en Lodish, 1969) zullen wij een eenvoudig media-allocatiemodel specificeren, dat ontwikkeld werd door Lee en Burkart (1960).

Dit model houdt zich bezig met de allocatie *binnen* een medium zoals bijvoorbeeld „adverteren met behulp van dagbladen”. Dit is dus als het ware de tweede „trap” van het mediakeuzeprobleem, waarvan de eerste trap het kiezen van de verschillende media is. Nadat eenmaal een medium gekozen is dient men de gelden binnen dat medium te verdelen. De objectfunctie, die gemaximeerd wordt is in dit geval „the mean number of impacts”, d.w.z. het gemiddelde aantal malen dat een advertentie gezien wordt door een individu in de zgn. „target group”. In Lee en Burkart's model speelt het begrip „attention value” van een dagblad i (a_i) een grote rol naast de variabele die het deel specificeert van de pagina, dat door een advertentie in dagblad i in beslag genomen wordt: p_i . De „attention value” wordt in dit model gedefinieerd als dat deel van de „target group” dat een hele pagina in dagblad i leest. In het onderhavige model wordt aangenomen dat een deel p_i van een pagina van het dagblad i gezien zal worden door een proportie $\sqrt{p_i}$ van de lezers van het medium. De hoeveelheid geld die voor advertenties in dagbladen uitgegeven mag worden, wordt gedefinieerd als c en de kosten van het adverteren in het dagblad i ter grootte van één pagina als c_i , $i = 1, \dots, k$:

$$(1) \quad \max_{z_i} H = \sum_{i=1}^k a_i z_i$$

onder de volgende restricties:

$$(2) \quad 0 \leq z_i \leq 1$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^k c_i z_i = c$$

waarbij $z_i = \sqrt{p_i}$

k = het aantal media, dat gebruikt kan worden.

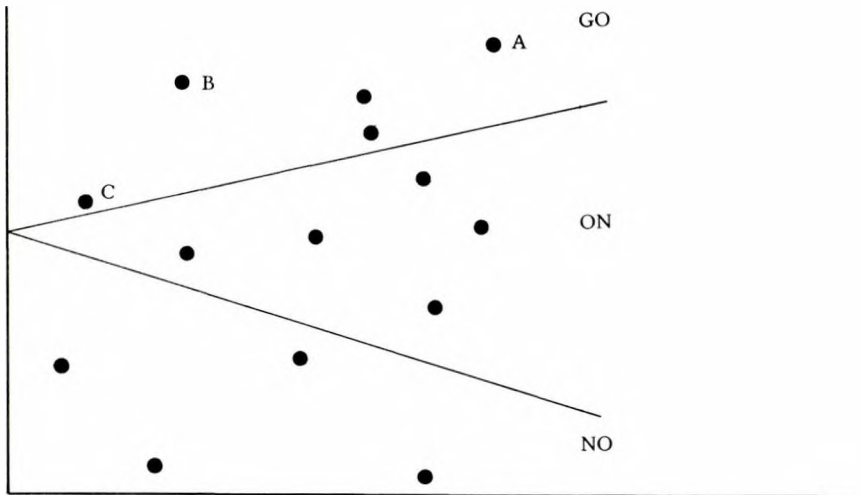
* Dit model kan met behulp van een Lagrange multiplier opgelost worden, waarbij rekening gehouden wordt met (2). *

Risico-evaluatie modellen

Tot slot van deze paragraaf geven wij een beschrijving van een risico-evaluatiemodel zoals dit door Urban (1968) werd ontwikkeld. Dit model heeft (zoals zoveel risico-evaluatiemodellen) betrekking op de evaluatie van potentiële nieuwe produkten. Deze evaluatie vindt plaats door de verwachting (E) en de standaarddeviatie (V) van de zgn. „differential profit-verdeling”, de verdeling van de additionele opbrengsten die ontstaan door toevoeging van een nieuw produkt aan het assortiment, voor diverse combinaties van marketinginstrumenten (marketing mixes) tegen elkaar af te zetten: zie figuur 5.

Figuur 5 Verwachting „Differential Profit” versus „Differential Uncertainty”

E = verwachting



V = Differential Uncertainty

* Standaarddeviatie en verwachting van de differential profit-verdeling (die in principe door middel van simulatie verkregen kan worden) die behoren bij een bepaalde mix worden in bovenstaande figuur door een punt aangegeven. Naast deze combinaties van „return” (E) en „risk” (V) heeft Urban, zoals uit figuur 5 blijkt een aantal „gebieden” gespecificeerd die aangeven of een bepaalde risk-return combinatie aanleiding geeft tot:

- 1 eliminatie van een potentiële mix (combinaties die vallen in de „NO-area”), dan wel
- 2 nader onderzoek naar de „potentie” van een potentiële mix (combinaties die vallen in de „ON-area”), dan wel
- 3 acceptatie van een potentiële mix (combinaties die vallen in de „GO-area”).

Het specificeren van de NO-, ON- en GO-gebieden, alsmede de eerder geïntroduceerde keuze van de maatstaven die differential profit en uncertainty tot uitdrukking brengen, is steeds subjectief en afhankelijk van de risico-preferentie van degene die een beslissing dient te nemen. Mixes die behoren bij „punten” die vallen in het gebied waarin een GO-beslissing aan de orde is, zullen geprefereerd worden boven mixes die behoren bij punten die vallen in een gebied waar de ON-beslissing opgeld doet. Deze laatste punten worden op hun beurt weer geprefereerd boven de mixes die behoren bij punten die vallen in een NO-beslissingsgebied. Wanneer er meerdere punten zijn in het GO-beslissingsgebied dan is de selectie van het „optimum” minder eenduidig. Dit is dan gebaseerd op de attitude van diegene, die de beslissing neemt. Een aantal mogelijke beslissingen om tot een zeker „optimum” te komen zullen wij hieronder aan de hand doen:

- 1 maximeer de verwachting van de differential profit-verdeling onder de restrictie dat deze verwachting in het GO-gebied ligt;
- 2 minimeer de differential uncertainty, opnicuw onder de restrictie dat de verwachting in het GO-gebied ligt.
- 3 maximeer de afstand van een punt tot de lijn die het GO-gebied bepaalt, d.w.z. kies dat punt dat het verst van de restrictie aflight en dus het meest „zeker” is.

Met betrekking tot figuur 5 betekent dit dat onder deze verschillende beslissingsregels de volgende punten als optimum worden gekozen:

- 1 Regel 1: punt A
- 2 Regel 2: punt C
- 3 Regel 3: punt B

Uit dit voorbeeld blijkt dat de keuze voor een alternatief bepaald wordt door de risico-attitude van degene die een keuze moet nemen. Hieruit moge het specifieke karakter van risico-evaluatiemodellen blijken. *

Naast risico-evaluatiemodellen die gehanteerd kunnen worden om tot de keuze van hantering van een bepaalde marketing-mix te komen, zijn er risico-evaluatiemodellen die zich bezighouden met de keuze van potentiële *produkten* met bijbehorende combinatie van marketinginstrumenten (zie: Dean and Nishry, 1965; Leeftlang, 1972).

6 Evaluatie

Nu in de voorgaande paragrafen een overzicht gegeven is van wiskundige marketingmodellen kunnen wij enige woorden wijden aan een evaluatie van deze modellen. Alhoewel in theorie en in de praktijk tal van modellen zijn ontwikkeld die de werkelijkheid op een verfijnde en meer adequate wijze weergeven dan de modellen die in dit artikel de revue hebben gepasseerd moet toch gesteld worden dat de theoretische en praktische waarde van marketingmodellen nog relatief laag te noemen is.

Hiermee komen wij dan op een aantal van de onlangs door Bannink (1973) in dit blad gememoreerde oorzaken waarom er onvrede rond de toepassing van operations research heerst. Ook wiskundige marketingmodel-

len kunnen „onvolledig” zijn, terwijl daarnaast de modelkeuze „verkeerd” kan zijn. Het onvolledig zijn spreekt ons in dit verband bijzonder sterk aan. In een groot aantal door ons bestudeerde modellen werd geabstraheerd van het bestaan van meer dan één marketinginstrument, alsmede van het bestaan van concurrenten. Daarnaast bevatten een groot aantal modellen *geen* relaties die betrekking hebben op het gedrag van consumenten op markten, terwijl „het denken vanuit de markt” volgens velen toch datgene is, dat zo specifiek voor marketing is.

Daarnaast willen wij nog het bijzonder fragmentarische karakter van de meeste marketingmodellen noemen. Hiermee bedoelen wij, dat de meeste modellen opgezet zijn om specifieke marketingproblemen mee te kunnen helpen oplossen en dat aan de relaties tussen de wiskundige structuren van diverse modellen niet veel aandacht besteed wordt. Met behulp van de in dit artikel gegeven classificatie hebben wij geprobeerd de diverse typen modellen in kaart te brengen zodat de relatie tussen de genoemde structuren wat duidelijker moge zijn.

Het is in het kader van dit artikel onmogelijk om aan te geven wat er op het terrein van de informatievoorziening allemaal nog zou moeten gebeuren om de theoretische en praktische waarde van marketingmodellen te vergroten. Evenmin is het mogelijk om in dit verband aandacht te schenken aan de opbrengsten en kosten van het hanteren en construeren van modellen, een onderwerp dat evenwel van bijzondere importantie is en nog weinig aandacht geniet.

Aan het slot van dit artikel willen wij wel nog enige woorden wijden aan de rol die wiskundige modellen in een marketing-informatiesysteem kunnen spelen. Aangezien een model een stilering van de werkelijkheid is en de werkelijkheid steeds aan veranderingen onderhevig is, is het onwaarschijnlijk dat een marketing-informatiesysteem alle mogelijk *relevante* modellen bevat. Wel is het natuurlijk mogelijk om een *aantal* empirisch getoetste modellen in een modellenbank op te slaan en deze opnieuw ter beschikking komende data toe te passen.

In dit verband zullen ook de zgn. simulatiemodellen een bijzonder grote rol kunnen spelen (zie hiervoor o.m. de Vries, 1973). Dat steeds getoetst moet worden of met deze modellen de werkelijkheid adequaat weergegeven wordt, spreekt vanzelf. Zo valt te denken aan het opnemen van een aantal responsmodellen en optimeringsmodellen die in een marketing-informatiesysteem betrekking hebben op de reguliere hantering van marketinginstrumenten. Verandert het gedrag van consumenten, het gedrag van producenten, de hantering van de instrumenten, etc sterk van periode tot periode, dan zal men nieuwe modellen dienen te ontwikkelen. Dit laatste impliceert dat de rol van de wiskundige modellenbouwer niet door een mechanisme kan worden vervuld.

Referenties

- Aeyelts Averink, G. J. (1968), *Mediakeuze in de Reklame*, Rotterdam, Universitaire Pers.
- Aeyelts Averink, G. J. (1970), „Marketing Models for Consumer Durable Products”, in *Papers Esomar Congress* (1970), Barcelona.
- Aeyelts Averink, G. J. (1972), „Micro Economische Modellen voor het Marketing Beleid”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, vol. 46, pp. 125-135.
- Armington, P. S. (1969), „A Theory of Demand for Products distinguished by Place of Production”, *I.M.F. Staff Papers*, 16, pp. 159-178.
- Bannink, R. (1973), „Problemen bij Toepassing van Operations Research” *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, vol. 47, pp. 273-279.
- Benjamin, B. en Maitland, J. (1958), „Operational Research and Advertising: Some Experiments in the Use of Analogies”, *Operational Research Quarterly*, vol. 9, pp. 207-217.
- Bosman, A. (1971), „Operations Research en Marketing”, *Informatie*, vol. 13, pp. 323-333.
- Bosman, A. (1972), „Marketing en Voorraden”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, vol. 46, pp. 209-224.
- Brown, A. A., Hulsmit, F. T. en Kettelle, J. D. (1956), „A Study of Sales Operations”, *Operations Research*, pp. 296-308.
- Brown, A. en Deaton, A. (1972), „Surveys in Applied Economics: Models of Consumer Behaviour”, *The Economic Journal*, vol. 82, pp. 1145-1236.
- Chatfield, C., Ehrenberg, A. S. C. en Goodhardt, G. J. (1966), „Progress on a Simplified Model of Stationary Purchasing Behaviour”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, vol. 79, pp. 317-367.
- Cowling, K. and Cubbin, J. (1971), „Price, Quality and Advertising Competition: An Econometric Investigation of the United Kingdom Car Market”, *Economica*, vol. 38, pp. 378-394.
- Cox, D. F. en Good, R. E. (1967), „How to Build a Marketing Information System”, *Harvard Business Review*, vol. 45, pp. 145-154.
- Dean, B. V. en Nishry, M. J. (1965), „Scoring and Profitability Models for Evaluating and Selecting Engineering Projects”, *Operations Research*, vol. 15, pp. 550-569.
- Dorfman, R. and Steiner, P. O. (1959), „Optimal Advertising and Optimal Quality”, *The American Economic Review*, vol. 49, pp. 826-836.
- Ehrenberg, A. S. C. (1959), „The Pattern of Consumer Purchases”, *Applied Statistics*, vol. 8, pp. 26-41.
- Ehrenberg, A. S. C. (1971), *Repeat Buying*, Amsterdam, North Holland Publishing Company.
- Ferber, R. en Verdoorn, P. J. (1962), *Research Methods in Economics and Business*, New York, MacMillan.
- Frank, R. E. (1962), „Brand Choice as a Probability Process”, *Journal of Business*, vol. 35, pp. 43-56.
- Hartung, P. H. en Fisher, J. L. (1965), „Brand Switching and Mathematical Programming in Market Expansion”, *Management Science*, vol. 11, pp. 231-243.
- Herniter, J. D. en Howard, R. A. (1964), „Stochastic Marketing Models”, in Hertz, D. B. en Eddison, R. T., eds. *Progress in Operations Research*, New York, John Wiley & Sons, vol. 2, pp. 33-96.
- Howard, R. A. (1963), „Stochastic Process Models of Consumer Behaviour”, *Journal of Advertising*, vol. 3, pp. 35-42.
- Klein, L. R. en Lansing, J. B. (1955), „Decisions to Purchase Consumer Durable Goods”, *Journal of Marketing*, vol. 20, pp. 109-132.
- Kotler, Ph. (1964), „Marketing Mix Decisions for New Products”, *Journal of Marketing Research*, vol. 1, pp. 43-49.
- Kotler, Ph. (1967), *Marketing Management: Analysis, Planning and Control*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc.
- Kotler, Ph. (1970), „Corporate Models: Better Marketing Plans”, *Harvard Business Review*, July/August, pp. 135-149.
- Kuehn, A. A. (1961), „A Model for Budgeting Advertising”, in Bass, F. M. en Buzzel, R. D., eds., *Mathematical Models and Methods in Marketing*, Homewood, Illinois, Richard D. Irwin Inc., pp. 315-348.
- Kuehn, A. A. (1962), „Consumer Brand Choice - A Learning Process?” *Journal of Advertising Research*, vol. 2, pp. 10-17.
- Lambin, J. J. (1970), *Modèles et Programmes de Marketing*, Paris, Presses Universitaires de France.
- Lambin, J. J. (1972), „A Computer On-line Marketing Mix Model”, *Journal of Marketing Research*, vol. 9, pp. 119-126.
- Lee, A. M. en Burkart, A. J. (1960), „Some Optimization Problems in Advertising Media”, *Operations Research Quarterly*, vol. 11, pp. 113-122.

Leeflang, P. S. H. (1972), „De Bepaling van het Artikelassortiment in een Dynamisch Marketing-beleid, Kwantitatief Gezien”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, vol. 45, pp. 151-170.

Leeflang, P. S. H. (1974), *Mathematical Models in Marketing; a survey, the stage of development, some extensions and applications*, Leiden, Stenfert Kroese B.V.

Leeflang, P. S. H. en Koerts, J. (1970), „Plaatsbepaling van Marketing”, *Economisch Statistische Berichten*, jaargang 55, pp. 1196-1200, 1220-1223.

Leeflang, P. S. H. en Koerts, J. (1973a), „Mathematical Response Models in Marketing based on Markovian Consumer Behaviour Models”, *Report 7309, Econometric Institute Rotterdam*.

Leeflang, P. S. H. en Koerts, J. (1973b), „Marketing and Modelling, Two Important Concepts and the Connection Between Them”, *European Journal of Marketing*, vol. 7, pp. 203-217.

Little, J. D. C. en Lodish, L. M. (1969), „A Media Planning Calculus”, *Operations Research*, vol. 17, pp. 1-35.

Magee, J. F. (1953), „The Effect of Promotional Effort on Sales”, *Journal of the Operations Research Society of America*, vol. 1, pp. 64-74.

Massy, W. F. en Frank, R. E. (1965), „Short Term Price and Dealing Effects in Selected Market Segments”, *Journal of Marketing Research*, vol. 2, pp. 171-185.

Massy, W. F., Montgomery, D. B. en Morrison, D. G. (1970), *Stochastic Models of Buying Behaviour*, Cambridge, Mass., M.I.T. Press.

Montgomery, D. B. (1969), „A Stochastic Response Model with Application to Brand Choice”, *Management Science*, vol. 15, pp. 323-337.

Montgomery, D. B. en Urban, G. L. (1969), *Management Science in Marketing*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc.

Morrison, D. G. (1966), „Testing Brand Switching Models”, *Journal of Marketing Research*, vol. 3, pp. 401-409.

Palda, K. S. (1964), *The Measurement of Cumulative Advertising Effects*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc.

Portes, M. J. (1970), „Are Marketing Men blind to the Charm of their Models? ”, *European Business*, vol. 27, pp. 53.

Rewoldt, S. H., Scott, J. D. en Warshaw, M. R. (1969), *Introduction to Marketing Management*, Homewood, Illinois, Richard D. Irwin Inc.

Telsler, L. G. (1962), „The Demand for Branded Goods as Estimated from Consumer Panel Data”, *Review of Economics and Statistics*, vol. 44, pp. 300-324.

Tinbergen, J. (1956), *Economic Policy: Principles and Design*, Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Urban, G. L. (1968), „A New Product Analysis and Decision Model”, *Management Science*, vol. 12, pp. B490-B517.

Verdoorn, P. J. (1964), *Het Commerciële Beleid bij Verkoop en Inkoop*, Leiden, H. E. Stenfert Kroese.

Verdoorn, P. J. (1972), „Marktonderzoek en Marktbeleid”, *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*, vol. 46, pp. 100-114.

Verdoorn, P. J. en Schwartz, A. N. R. (1972), „Two Alternative Estimates of the Effects of E.E.C. and E.F.T.A. on the Pattern of Trade”, *European Economic Review*, vol. 3, pp. 291-335.

Vries, S. de (1973), *Consumentengedragsmodellen*, Leiden, Stenfert Kroese B.V.

Wierenga, B. (1974), *An investigation of brand choice processes*, Rotterdam, Rotterdam University Press.

Zwan, A. van der (1968), *Duurzame Consumptiegoederen in het Gezin*, Rotterdam, Universitaire Pers.