QUANTITATIEVE VERHOUDINGEN EN TECHNISCH- EN ECONOMISCH JUISTE PROPORTIONALITEIT

door Prof. Dr S. Kleerekoper

III (slot)

Ik wil nu overgaan tot het signaleren der misverstanden, waar ik aan het slot van artikel II reeds op gedoeld heb.

Zo meent b.v. mijn collega *van der Schroeff*, dat er een tegenstelling bestaat tussen de opvatting van *Limperg* en mij, en zulks reeds in de aanvang der problematiek [20]).

Wij lezen t.a.p.:

> „Reeds eerder is opgemerkt, dat er aan het vraagstuk der quan-
> „titatieve verhoudingen twee facetten zijn:
> 1. „de verhouding van de hoeveelheid der middelen zoals deze *in „het product* gebonden worden (dus die we in de quantitatieve „samenstelling van het product vinden, waarbij de quantitatieve „samenstelling de verhouding is);
> 2. „de verhouding der middelen, waarin de *samenvoeging* der mid- „delen geschiedt, zonder dat die verhouding de quantitatieve „samenstelling van het product behoeft aan te geven.
>
> „Het zijn twee zeer verschillende visie's: de ene ziet naar de samen- „voeging van *middelen* om tot het product te komen, de andere „naar het *product* en leidt daaruit de samenvoeging der middelen „af!
>
> „Hiermede is de scheiding tussen de opvattingen van Prof. Lim- „perg en Prof. Kleerekoper meteen aangegeven en bepaald: *Prof. „Limperg bepaalt het begrip technisch juiste proportionaliteit uit „de eerste beschouwing, Prof. Kleerekoper uit de tweede!*"

Het blijve hier in het midden in hoeverre de twee facetten door *v. d. Schroeff* bedoeld belangrijk genoeg zijn om van een „scheiding van opvattingen" te spreken. Maar het is wel belangrijk om op te merken, dat er van twee verschillende opvattingen, van *Limperg* en van ondergetekende, geen sprake is. Beider opvattingen zijn die, welke *van der Schroeff* aangeeft sub 2: „de verhouding der middelen waarin de samenvoeging der middelen geschiedt, zonder dat die verhouding de quantitatieve samenstelling van het product behoeft aan te geven". Of nog iets duidelijker gezegd: dit is de probleemstelling, die oorspronkelijk door *Limperg* is gegeven en van welke probleemstelling uit, door mij de verdere analyse van τ en van al hetgeen hiermede verband houdt, is ontwikkeld. Dit is zeer evident: *iedere* theorie van de quantitatieve verhoudingen, die uitgaat van de hypothese van de „afnemende trefkans" en van het bestaan van „ongebruikte resten" is *eo ipso* een theorie, die uitgaat van de verhouding, waarin de samenvoeging der middelen geschiedt zonder daarbij de quantitatieve samenstelling van het product aan te geven. Van een verschil in visie, zoals *van der Schroeff* dit meent te zien is dus zeer zeker geen sprake: beide visies gaan uit van „afnemende trefkans" en „ongebruikte resten".

---

[20]) College Prof. Dr H. J. v. d. Schroeff. De Leer van de quantitatieve verhoudingen. Het dictaat is uitgegeven onder goedkeuring van Prof. v. d. Schroeff en verkrijgbaar in de boekhandel. Ik zal het niet in zijn geheel behandelen, doch slechts enkele punten eruit aan een nadere beschouwing onderwerpen.

Intussen is het, geloof ik, wel verklaarbaar hoe *van der Schroeff* tot dit misverstand gekomen is. *Limperg* ziet n.l. twee moeilijkheden:

a. de samengevoegde quanta worden niet in het product terug gevonden;
b. de productiemiddelen bestaan uit ongelijksoortige eenheden, waardoor de onderlinge meetbaarheid op bezwaren stuit.

In het eerste punt ligt de bron van het onderhavige misverstand. De opmerking sub a toegelicht met voorbeelden, zoals het geval van toeziende arbeid, die zich in het resultaat onttrekt aan onze waarneming of warmte, die door een schoorsteen verdwijnt, kan aanleiding geven tot de opvatting als zou het probleem bestaan in het opsporen der quantitatieve verhouding in het product.

Maar de opvatting is onjuist: de erkenning dat men in het product niet alle productiemiddelen terug vindt, die aan zijn ontstaan hebben medegewerkt, betekent niet dat gezocht wordt naar de verhouding zoals deze in het product wordt aangetroffen: met evenveel recht kan men concluderen, dat er juist uit voortvloeit, dat gezocht wordt naar de verhouding waarin de productiemiddelen aan de totstandkoming van het product medewerken, onafhankelijk van hun verhouding in het product, en dit is inderdaad de gemeenschappelijke opvatting van Limperg en van de schrijver van dit artikel.

Het hier aan de orde gestelde verschilpunt heeft nog een verdere consequentie. Door het onderkennen van de moeilijkheden genoemd sub a en b in de aanvang van dit gedeelte der theorie komt *Limperg,* omdat deze moeilijkheden inderdaad door hem wel gesteld maar niet opgelost zijn, niet tot een werkelijk uitrekenen van de verhouding τ.

In zijn gedachtengang en volgens de stand der theorie, van de dagen, waaruit deze probleemstelling stamt, behield τ dus een min of meer hypothetisch karakter: er moest een verhouding als τ bestaan (per deductie), maar berekenbaar of waarneembaar was zij nog niet.

De werkelijke berekening zou een volgende stap moeten zijn en de verificatie van de berekening in de empirie weer een volgende. Mij dunkt dat dit de normale ontwikkeling van iedere wetenschap is. Nu is het inderdaad uit het bovenstaande duidelijk geworden dat *Limperg* de deductie — en dus voorlopig de hypothese — gegeven heeft. Ik geloof een stap verder te zijn gekomen en voor het geval van de lineair homogene productiefunctie τ ook werkelijk te hebben berekend (hierover in het volgende nader) en zodoende ook het instrument te hebben gegeven om τ in de empirie aan te geven.

Maar om hieruit te concluderen, zoals *van der Schroeff* t.a.p. op pag. 30, dat de technisch juiste proportionaliteit bij Limperg slechts een „kunstbegrip" is en dus afwijkt van de uitwerking door mij gegeven, is een misvatting. *Van der Schroeff* ziet hier ten onrechte een tegenstelling, waar van niets anders sprake is dan van een normale wetenschappelijke ontwikkeling en van verificatie van theorie, waarvan Limperg de prioriteit toekomt.

Ik geloof met deze beschouwingen de derde stelling — de stelling over de betekenis van Limperg voor de onderhavige problematiek — voldoende te hebben geadstrueerd.

Tenslotte kom ik nu tot de behandeling van de stellingen IV en V. Het moeilijke punt, dat hier eigenlijk de gehele problematiek bepaalt, is de vraag van de waarde en de prijs en de betekenis hiervan voor het probleem van τ. Het is de moeilijkheid, die ook *Limperg* zorgen heeft gebaard en in het vorige punt sub b genoemd is: de productiemiddelen bestaan uit ongelijksoortige eenheden, waardoor de onderlinge meetbaarheid op bezwaren stuit. De questie van de waarde en de prijs heeft al tot allerlei complicaties geleid bij de formulering van de wet van de afnemende meeropbrengst *pur et simple*, zoals wij in het voorgaande uitvoerig betoogd hebben. Maar deze bezwaren culmineren wanneer men de vraag gaat stellen naar de meest gunstige verhouding der productiemiddelen zonder dat men in het oordeel de prijzen betrekt. Dit is dus de vraag naar τ. De overgrote meerderheid der schrijvers behandelt de vraag in het geheel niet: zij komt eenvoudig niet aan de orde, of voorzover zij aan de orde komt worden stilzwijgend, of langs een achterdeurtje, prijzen in de probleemstelling betrokken (o.a. *Mill*, *Garver* en *Hansen*, zoals in het voorgaande is aangetoond). *Limperg* heeft de vraag gesteld en om een oplossing gevraagd en anderen stellen, dat de vraag onoplosbaar is. Van degenen, die de vraag niet aan de orde stellen, moet wel worden aangenomen, dat zij haar voor onoplosbaar houden. Het is onmiskenbaar een verdienste van collega *van der Schroeff*, dat hij de vraag heeft gesteld en haar onomwonden voor onoplosbaar heeft verklaard, zij het dan ook, dat wij op dit punt met hem van mening verschillen. In ieder geval is hierdoor de basis voor een grondige discussie gelegd. Beginnen wij wederom met een citaat. T.a.p. pag. 28 geeft *van der Schroeff* een referaat van de theorie, die ik heb ontwikkeld in B I § 74. De lezer zij naar deze paragraaf verwezen; de voornaamste opmerkingen, die mijn criticus naar aanleiding hiervan maakt, volgen hieronder.

> „Voorbeeld: de bewerking van een stuk land. Variabele fac-„toren zijn de hoeveelheid arbeid en de hoeveelheid meststoffen „(niet gereedschap wegens de ondeelbaarheid, er is niets tussen „0 en 1). Het gaat om de substitutie tussen meer arbeid en minder „mest en omgekeerd, op een wijze dat dit t.a.v. het resultaat gelijk „is. I.p.v. x arbeid en y mest kunnen wij ook nemen x^1 en y^1.
>
> „Is nu uit het oogpunt van de technische proportionaliteit te zeg-„gen, dat het een doelmatiger is dan het ander? Het kernpunt van „de critiek ligt hier in het feit, dat Prof. Kleerekoper technische en „economische proportionaliteit vermengd heeft! Uit een oogpunt van „economische proportionaliteit kan men tot een oordeelvelling ko-„men omtrent de doelmatigheid van de substitutie, zo de prijsver-„houdingen der middelen deze rechtvaardigen. Maar dan staan x „en y ook niet meer indifferent tegenover elkaar, dan immers zijn „zij tot waarden herleid; nu gaat het niet meer om man-uur/kilo „mest, maar het gaat om waarden.
>
> „Expliciet heeft Prof. Kleerekoper de prijzen uitgeschakeld, bij „herhaling zelfs. Maar in het uitgangspunt is impliciet de invloed „van de prijzen op de quantitatieve verhoudingen opgenomen. De „technisch juiste proportionaliteit is gebaseerd op een oordeelvelling, „welke past in het vraagstuk der economische proportionaliteit.
>
> „Hij zegt: Als ik het een met 1% vermeerder en het ander met „1 % verminder zonder verschil in resultaat, is dit alleen waar als „aan deze verwisseling een waardeoordeel ten grondslag heeft ge-„legen. Hij brengt er dus ongemerkt de economische proportionali-„teit in, en dat nog wel verkeerd! Alhoewel het punt mathematisch „exact bepaald is (dat is juist het misleidende!) is het punt in het

„kader van wat het wil voorstellen nog volmaakt willekeurig; het „heeft geen critische betekenis!

„Het is slechts een punt, dat aan een bepaalde eigenschap vol- „doet, maar van zulke punten kan men er vele stellen. Zodra dit „punt willekeurig is, komt ook de vaststelling van maximum- en „minimumpositie op losse schroeven te staan: als er geen punt meer „is, is er geen overgang in phasen meer.

„Prof. v. d. Schroeff hoopt, dat we, met enig nadenken, met hem „tot het inzicht komen, dat het onhoudbaar is. Aantrekkelijk ge- „noeg is de exacte vorm, maar die dreigt ons te misleiden.

Dit standpunt, dat mijn collega hier formuleert, is een nadere uitwerking van zijn algemene visie, die wij op pag. 26 lezen.

„De technisch juiste proportionaliteit voor het geval van ver- „anderlijke verhoudingen is niet alleen niet exact te bepalen, maar „zij is principieel onmogelijk te bepalen door het ontbreken van een „maatstaf ter beoordeling van de technische doelmatigheid.

„Meten kan men veel, maar in the end mist men de maatstaf der „technische doelmatigheid: de exactheid der meting gaat over in een „onmogelijkheid".

....

„Bij veranderlijke verhoudingen houdt het begrip technische propor- „tionaliteit op zin te hebben: het is een kunstbegrip zonder zin, dat „alleen verwarring kan stichten".

....

„De middelen zijn, bij gebrek aan een maatstaf, onderling quan- „titatief onvergelijkbaar, en hetzelfde geldt voór de verhouding van „middelen tot resultaat".

Als ik deze critiek goed versta zijn haar kernpunten de volgende:

1. zonder inschakelen van prijzen is iedere bepaling van een gunstige verhouding $\frac{k_1}{k_2}$, beter nog het vergelijken van twee verhoudingen v_1 en v_2 van de aangewende productiemiddelen ten aanzien van hun economisch-technische rationaliteit onmogelijk.
2. bij de oplossing heb ik langs een achterdeur en onbewust ook de prijzen weer binnengehaald.
3. het punt $\left(\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{dp}{dk_1}}{\frac{dp}{dk_2}}\right)$ is willekeurig d.w.z. *economisch* willekeurig.

Ik geloof dat een antwoord, dat

1. aantoont dat ook impliciet niet van prijzen gebruik gemaakt wordt,
2. aantoont dat het punt, dat gevonden wordt, een optimale rationaliteit aangeeft (afgezien van prijzen dus),

een weerlegging van bovenstaande critiek inhoudt.

Hiertoe lijkt het mij het beste om te beginnen met de populaire voorstelling van zaken, die in B I § 74 gegeven wordt, nog iets meer te populariseren.

De critiek van mijn collega heeft n.l. op deze paragraaf — eigenlijk op het eerste deel ervan — betrekking, ofschoon deze bewijsvoering de inleiding is van 5 andere, meer diepgaande afleidingen, die in B I en B II voorkomen en waar mijn collega geen aandacht aan wijdt.

In de eerste plaats dienen wij dan op te merken, dat de redenering van B I § 74 ten doel heeft om het gevolg van substitutie van het éne productiemiddel door het andere te onderzoeken.

Wanneer nu de prijs van de productiemiddelen ons geen belang inboezemt, zal iedere substitutie van een eenheid van het ene productiemiddel door een eenheid van het andere, die *ceteris paribus* de hoeveelheid product doet toenemen, economisch rationeel zijn. Omgekeerd zal iedere substitutie, die de hoeveelheid product *ceteris paribus* doet afnemen economisch irrationeel zijn.

Hieruit volgt dat wij rationelerwijze en afgezien van de prijzen doorgaan met substitutie tot dat ondeelbaar kleine punt, waarop het effect van de substitutie juist gelijk nul is. Men ziet gemakkelijk in dat het in deze redenering onverschillig is of men de substitutie van „links" of van „rechts" doet plaats vinden. *De technisch juiste proportionaliteit ligt dus op het punt waar de substitutie van het ene productiemiddel door het andere geen effect heeft op de hoeveelheid product. Met deze redenering is de norm voor* τ *in principe gegeven. Het is een quantitatieve verhouding, die op grond van het economische motief als rationeel beschouwd moet worden en die inderdaad geen enkel waardeoordeel inhoudt: wij vragen hier naar het maximale product, dat verkregen wordt door veranderingen aan te te brengen in de verhouding* $\frac{k_1}{k_2}$ *zonder dat de prijs hierbij een rol speelt d.w.z. naar een maximum, dat bij iedere prijsverhouding geldt. Zo goed als het mogelijk is, dat wij een irrationeel stadium kunnen vaststellen — en van der Schroeff geeft zelf toe dat dit mogelijk is — kunnen wij een punt van de optimale productie vaststellen, dat voor iedere prijsverhouding technisch optimaal is.*

Ik stel nu vast, dat de norm voor de technisch juiste proportionaliteit hier in principe en verbaal gegeven is. Hetgeen nog moet gebeuren is het overbrengen van deze norm in symbolen en als de door mij in B I gegeven betrekking $E_1 = E_2$ enz. uit deze verbale norm afleidbaar is, dan geldt ook voor haar, dat zij geen waardeoordeel inhoudt en werkelijk een technisch juiste verhouding aangeeft.

Ik zal nu eerst een afleiding geven, die incorrect is en vervolgens de meer correcte, die in B I § 74 vookomt. Dit zal het voordeel geven, dat de moeilijkheid, die *van der Schroeff* hier in de impasse gevoerd heeft — en ik geloof hem niet alleen — duidelijk in het licht zal worden gesteld.

De bedoelde incorrecte redenering luidt als volgt:

Laat ik het eerste productiemiddel K_1 toenemen met Δk_1 eenheden productiemiddel, dan neemt het product toe met Δp eenheden product. Dit betekent, dat als ik dit productiemiddel doe toenemen met 1 eenheid productiemiddel, het product toeneemt met $\frac{\Delta p}{\Delta k_1}$ eenheden product [21]).

Op dezelfde wijze beredeneren wij nu, dat als wij het productiemiddel K_2 *verminderen* met 1 eenheid productiemiddel, het product *afneemt* met $\frac{\Delta p}{\Delta k_2}$ eenheden product.

En nu is wegens bovenstaande verbale oplossing de gunstigste verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ bereikt wanneer $\frac{\Delta p}{\Delta k_1} = - \frac{\Delta p}{\Delta k_2}$; dit is inderdaad niets an-

21) Voor de hier ten onrechte aangenomen rechte evenredigheid — die overigens hier niet ter zake doet — zie B I § 58. Wanneer Δk_1 tot 0 nadert kunnen wij de hierdoor ontstaande afwijking verwaarlozen.

ders dan hetgeen hierboven in woorden is gesteld, uitgedrukt in formule en van een waardeoordeel of enige betrekking tot een prijsverhouding is hier in het geheel geen sprake; en ik geloof niet dat collega *van der Schroeff* tegen deze stelling enig bezwaar zou hebben gemaakt.

Echter ontstaat hier een complicatie, die verband houdt met de keus der eenheden, en die voor mijn opponent het inzicht in het vraagstuk heeft vertroebeld. Dit blijkt o.a. uit zijn eerder geciteerde woorden: „De middelen zijn bij gebrek aan een maatstaf onderling onmeetbaar". Deze complicatie heeft echter met de in het geding zijnde questies

a. is er een reden om τ technisch rationeel te noemen?
b. is er in mijn oplossing toch nog een waardeoordeel verborgen?

niets te maken [22]. Immers: mijn oplossing gaat er geheel van uit om door een geschikte eenhedenkeus de volgens mijn opponent onderling onmeetbare productiemiddelen juist wel onderling meetbaar te maken.

De moeilijkheid is de volgende.

Wanneer wij de verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ vaststellen op grondslag van de voorwaarde $\frac{\Delta p}{\Delta k_1} = \frac{\Delta p}{\Delta k_2}$, dan is de verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ niet onafhankelijk van de eenheden waarin k_1 en k_2 en dus ook Δk_1 en Δk_2 zijn uitgedrukt.

Een voorbeeld moge dat in alle overvloed toelichten. In dit voorbeeld vervangen we $\frac{\Delta p}{\Delta k_1}$ door $\frac{dp}{dk_1}$ enz. waardoor de noodzakelijke differentiaties kunnen worden uitgevoerd. Zij de productiefunctie [23])

$$p = \sqrt{(10\, k_1 k_2 - 4\, k_1^2 - 3\, k_2^2)}$$

$$\text{Dan is } \frac{dp}{dk_1} = \tfrac{1}{2}\,(10\, k_1 k_2 - 4\, k_1^2 - 3\, k_2^2)^{-1/2}\ (10\, k_2 - 8\, k_1)$$

$$\text{en } \frac{dp}{dk_2} = \tfrac{1}{2}\,(10\, k_1 k_2 - 4\, k_1^2 - 3\, k_2^2)^{-1/2}\ (10\, k_1 - 6\, k_2)$$

De gunstigste verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ is dus bereikt wanneer

$$10\, k_2 - 8\, k_1 = 10\, k_1 - 6\, k_2$$
$$18\, k_1 = 16\, k_2$$
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{8}{9} \qquad \text{......} \quad (1)$$

Nemen wij nu aan dat deze productiefunctie is uitgedrukt in kilogrammen (k_1) en manuren (k_2). Laten wij nu overgaan van kilogrammen op hectogrammen en stellen wij de nieuwe eenheden k_1 (hectogrammen dus) voor door k_1'. De aantallen eenheden k_1 (overgaande in k_1') worden dus nu vermenigvuldigd met 10 en om dus dezelfde functionele betrekking uit te drukken moeten deze hoeveelheden k_1' dus worden gedeeld door 10.

---

[22]) Ik mag hier opmerken, dat ik in tal van geschriften de aandacht van de vakgenoten op de problemen van de eenhedenkeus gevestigd heb en wel o.a. op de volgende plaatsen: Over het gebruik van de wiskunde in de Economie, Uitg. P. Noordhoff 1938, pag. 42/43 (diss.).

Enige beschouwingen over het vraagstuk van de eenheden bij de quantitatieve analyse in de economie, P. Noordhoff 1939 (openbare les).

B I § 57, 58, 59; B I pag. 91; B II Hoofdstuk II, III, IV.

[23]) Zie B I § 80.

De nieuwe functie wordt dus

$$p = \sqrt{(k'_1 \; k_2 - \frac{4}{100} (k'_1)^2 - 3 \; k_2^2)}$$

$$\text{dus} \quad \frac{dp}{dk'_1} = {}^1\!/_2 \, (k'_1 \; k_2 - \frac{4}{100} (k'_1)^2 - 3 \; k_2^2)^{-1/2} \, (k_2 - \frac{8}{100} \, k'_1)$$

$$\frac{dp}{dk_2} = {}^1\!/_2 \, (k'_1 - \frac{4}{100} (k'_1)^2 - 3 \; k_2^2)^{-1/2} \, (k'_1 - 6 \; k_2)$$

Wij moeten nu weer $\frac{dp}{dk'_1} = \frac{dp}{dk_2}$ stellen, waaruit volgt.

$$k_2 - \frac{8}{100} \, k'_1 = k'_1 - 6 \; k_2$$

$$7 \; k_2 = 1.08 \; k'_1$$

$$\frac{k'_1}{k_2} = \frac{7}{1.08}$$

Bedenken wij nu verder dat $k'_1 = 10 \; k_1$ dan volgt hieruit

$$\frac{10 \; k_1}{k_2} = \frac{7}{1.08}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{0.7}{1.08} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welke verhouding afwijkt van (1). Door verandering van eenheden verandert dus het antwoord, hetgeen moet worden voorkomen.

In noot 32 heb ik verwezen naar geschriften, waarin wordt betoogd, dat dergelijke onjuistheden worden ondervangen door te werken met elasticiteitscoëfficiënten en wij moeten dus onze eerste incorrecte oplossing zodanig moduleren, dat wij er een elasticiteitscoëfficiënt inbrengen, die ons wiskundig onafhankelijk van de gekozen eenheden maakt, maar die verder aan de *economische* oplossing van ons vraagstuk niets verandert. Wij doen dit op populaire wijze door „met procenten te gaan werken" als volgt:

Neemt het productiemiddel Δk_1 eenheden toe, dan is dit een vermeerdering van $\frac{\Delta k_1}{k_1} \times 100$ procent. Het product zal ten gevolge van deze toename van k_1 toenemen met $\frac{\Delta p}{p} \times 100$ %. Indien wij nu het productiemiddel K_1 laten toenemen met 1 %, dan neemt dus het product toe met $\frac{\Delta p}{p} \times 100 : \frac{\Delta k_1}{k_1} \times 100 = \frac{\Delta p}{p} \, \frac{k_1}{\Delta k_1}$ %. (Hier ontmoeten wij dus onze eerste elasticiteitscoëfficiënt.)

Evenzo geldt dat wanneer het productiemiddel K_2 verminderd wordt met 1 % het product zal afnemen met $\frac{\Delta p}{p} \, \frac{k_2}{\Delta k_2}$ %. Nu volgt geheel uit de redenering, die wij bij de eerste oplossing gegeven hebben dat wij zolang moeten doorgaan met het vervangen van k_2 door k_1 tot het product hierdoor noch toe- noch afneemt dus tot dat

$$\frac{\Delta p}{p} \, \frac{k_1}{\Delta k_1} = \frac{\Delta p}{p} \, \frac{k_2}{\Delta k_2}$$

of

$$\frac{k_1}{p}\frac{\Delta p}{\Delta k_1} = \frac{k_2}{p}\frac{\Delta p}{\Delta k_2}$$

waarmee de door *van der Schroeff* aangevochten conditie voor τ gevonden is. Enig *waardeoordeel* ligt hier — het zij nogmaals geconstateerd — niet in opgesloten.

In alle overvloed wil ik nu onderzoeken of wij bij toepassing van deze formule wel onafhankelijk zijn van de gekozen eenheden. Uitgaande van de eerste functie

$$p = \sqrt{(10\,k_1 k_2 - 4\,k_1^2 - 3\,k_2^2)}$$

vinden wij nu

$$\frac{k_1}{p}\frac{dp}{dk_1} = \frac{k_2}{p}\frac{dp}{dk_2}$$

of

$$k_1 \frac{dp}{dk_1} = k_2 \frac{dp}{dk_2}$$

in verband met de afleiding van (1)

$$k_1\ (10\,k_2 - 8\,k_1) = k_2\ (10\,k_1 - 6\,k_2)$$

$$10\,k_1 k_2 - 8\,k_1^2 = 10\,k_1 k_2 - 6\,k_2^2$$

$$8\,k_1^2 = 6\,k_2^2$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{3/4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Gaan wij nu weer over van kilogrammen op hectogrammen, dan gaat onze productiefunctie wederom over in

$$p = \sqrt{(k'_1 k_2 - \frac{4}{100}(k'_1)^2 - 3\,k_2^2)}$$

en in verband met de afleiding van (2) schrijven wij nu

$$k'_1\ (k_2 - \frac{8}{100}\,k'_1) = k_2\ (k'_1 - 6\,k_2)$$

$$k'_1\,k_2 - \frac{8}{100}\,(k'_1)^2 = k'_1\,k_2 - 6\,k_2^2$$

$$\frac{8}{100}\,(k'_1)^2 = 6\,k_2^2$$

$$\left(\frac{k'_1}{k_2}\right)^2 = \frac{6}{0.08}$$

$$\left(\frac{k'_1}{k_2}\right)^2 = 75$$

Nu is wederom $k'_1 = 10\,k_1$, dus

$$\frac{10\,k_1}{k_2} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

d.i. dezelfde verhouding als (3), waaruit het onafhankelijk zijn van de eenhedenkeuze duidelijk blijkt [24]).

Uit het bovenstaande is nu weliswaar gebleken, dat in hetgeen ik technisch juiste proportionaliteit genoemd heb, *geen* waardeoordeel ligt opgesloten en dat er *wel* een reden is om deze door mij gedefinieerde ver-

[24]) Voor analoge beschouwingen zie *Enige beschouwingen over het vraagstuk van de eenheden bij de quantitatieve analyse in de economie*, pag. 10 e.v.

houding een technisch „juiste" te noemen (zoals in B I uitdrukkelijk is gezegd: „juist" op grond van het economisch motief), maar het is intussen nog niet duidelijk geworden op grond van welke redeneringen van mijn collega *van der Schroeff* het tegenovergestelde het geval zou zijn. Dit is inderdaad ook een moeilijke aangelegenheid, omdat in bovenstaand citaat wel enige zaken worden *beweerd*, maar allerminst bewezen. B.v.: „Het kernpunt van de critiek ligt hier in het feit, dat Prof. Kleerekoper technische en economische proportionaliteit vermengd heeft". Waarin deze vermenging bestaat, blijkt uit het citaat niet en uit mijn beschouwing blijkt, dat er in de gehele redenering niets voorkomt, dat op economische proportionaliteit lijkt. Tot nader order houd ik dus deze bewering van mijn opponent voor onbewezen en onjuist. Deze opmerking geldt overigens voor alle stellingen uit het bovenstaande citaat en ik geloof, dat, als wij iets van de gedachtengang van *van der Schroeff* willen trachten te begrijpen, wij zullen moeten aanknopen aan enige andere citaten.

Dit kan met meer vrucht geschieden wanneer wij eerst nog iets dieper op de materie ingaan.

De hierboven behandelde afleiding van τ is om zo te zeggen een eerste populaire benadering van het geval. Reeds in B I op pag. 81 wordt een andere diepere analyse aangeduid, welke in B I §§ 83, 84, 85 en 86 aan de orde wordt gesteld, om tenslotte in B II in de §§ 76, 77, 79a, 80 t/m 87 volledig te worden uitgewerkt.

Men kan een kritiek op het begrip technisch juiste proportionaliteit niet afdoen met een behandeling van de helft van § 74 uit B I, ook al meent *van der Schroeff* hiermede te kunnen volstaan. Intussen wil ik nu duidelijk maken waar het verband ligt tussen de methode van B I § 74 en al de andere methoden door mij in de bovengenoemde paragrafen toegepast, waarbij het toepassen van de methoden der isoquanten noodzakelijk wordt. De isoquante is een vorm van de productiefunctie, die uitvoerig behandeld is in B II Hoofdstuk VII, en waar ik hier alleen de voornaamste punten van wil aanstippen.

Onder een isoquante verstaan wij de curve, die alle mogelijke waarden van k_1 en k_2 geeft, die gebruikt kunnen worden om een constante hoeveelheid product (p) te produceren.

In B II § 73 is nu de vorm van de isoquante afgeleid; zij is hieronder getekend in fig. 3.

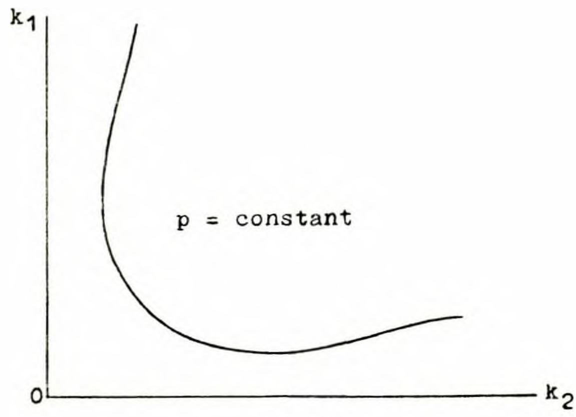

Fig. 3.

Wanneer wij nu p geleidelijk laten toenemen, verschuift de isoquante naar rechts, zodoende ontstaat er een curvenfamilie als getekend in figuur 4, die isoquanten aangeeft voor stijgende hoeveelheden product.

De lijnen $p = 1, 2, 3, 4$ enz. geven dus de isoquanten voor een hoeveelheid product van 1, 2, 3, 4 enz. eenheden.

Gaan wij nu eens na wat de substitutie-methode, die wij in bovenstaande afleiding van τ hebben toegepast, betekent wanneer zij wordt toegepast op een isoquantensysteem.

Onze substitutie komt er op neer dat wij k_1 voortdurend vermeerderen met 1 % en k_2 er mede verminderen of omgekeerd. Nu schuilt in deze populaire voorstelling nog een kleine incorrectheid, die wij nu gaan elimineren.

Wij moeten n.l. niet tegenover een vermeerdering van k_1 met 1 % een vermindering van k_2 met 1 % stellen, maar een vermindering met 1 % *boven het honderd.*

Voor ik deze bewering ga staven merk ik op dat wij in het volgende te doen hebben met een vergaande popularisatie. Hierdoor ontstaan onnauwkeurigheden, die inhaerent zijn aan de popularisatie zelve. Vermijding hiervan zou ons weer op het gebied der hogere wiskunde voeren, dat wij hier juist willen vermijden. Het resultaat wordt hierdoor niet beïnvloed. Wel stel ik mij voor om bij een andere gelegenheid een meer correcte afleiding te geven.

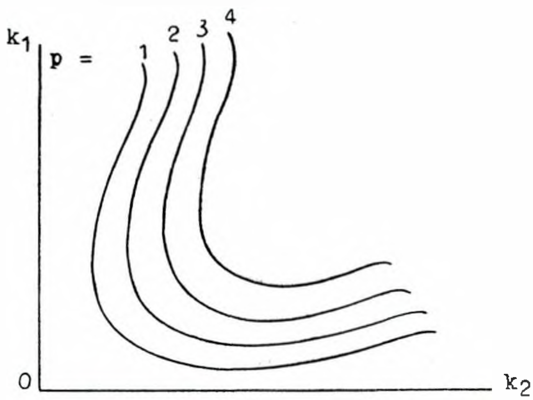

Fig. 4.

Wij zoeken dus het punt waar de substituties elkaar compenseren. Dit is natuurlijk te summier gezegd, maar na al het voorgaande is het zeker duidelijk. Bij het zoeken naar dit compensatiepunt zijn wij — alweer verkort uitgedrukt — als volgt te werk gegaan.

Vermeerdering van k_1 met 1 % geeft vermeerdering van p met

$$\frac{\Delta p}{p} \frac{k_1}{\Delta k_1} \%$$

Vermindering van k_2 met 1 % geeft vermindering van p met

$$\frac{\Delta p}{p} \frac{k_2}{\Delta k_2} \%$$

Vervolgens stelden wij de eis van de compensatie n.l. dat $\frac{\Delta p}{p} \frac{k_1}{\Delta k_1} \%$

$= \frac{\Delta p}{p} \frac{k_2}{\Delta k_2}$ %. Hierin schuilt echter de bedoelde incorrectheid, want de p in de tweede vorm ($\frac{\Delta p}{p} \frac{k_2}{\Delta k_2}$ % n.l.) is niet gelijk aan p in de eerste. De p in de tweede vorm is n.l. de oorspronkelijke

$$p \times \frac{100 + \frac{\Delta p}{p} \times \frac{k_1}{\Delta k_1}}{100}$$

Wij kunnen deze incorrectheid als volgt corrigeren.

Vermeerdering van k_1 met 1 % heeft tengevolge — zoals wij weten — vermeerdering van p met $\frac{\Delta p}{p} \times \frac{k_1}{\Delta k_1}$ % $= E_1$ % d.i. vermenigvuldigen van p met $\frac{100 + E_1}{100}$. Dit kunnen wij als volgt symbolisch schrijven

$$k_1 \times \frac{101}{100} \longrightarrow p \times \frac{100 + E_1}{100}$$

Wij zoeken nu een vermindering van K_2, die de vermeerdering van p compenseert, om daaruit de verhouding $\frac{k_1}{k_2} = \tau$ te bepalen.

Wij zoeken dus in dezelfde voorstelling

$$k_2 \times x \longrightarrow p \times \frac{100 + E_1}{100} \times \frac{100}{100 + E_1}$$

Wij stellen nu $p \times \frac{100 + E_1}{100} = \pi$ dus wij zoeken

$k_2 \times x \longrightarrow \pi \times \frac{100}{100 + E_1}$,zodanig dat $\pi \times \frac{100}{100 + E_1} = p$.

Verminderen wij nu k_2 met Δk_2, dan is dit een vermindering met $\frac{\Delta k_2}{k_2} \times 101$ % boven het honderd, hetgeen π vermindert met

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} \times 101 \text{ \% boven het honderd.}$$

Verminderen wij nu k_2 met 1 % boven het honderd, dan verminderen wij π met $\frac{\Delta \pi}{\pi} \times 101 : \frac{\Delta k_2}{k_2} \times 101 = \frac{\Delta \pi}{\pi} \times \frac{k_2}{\Delta k_2}$ % boven het honderd. Nu is $\frac{\Delta \pi}{\pi} \times \frac{k_2}{\Delta k_2} = E_2$. Dus: verminderen wij k_2 met 1 % boven het honderd, dan verminderen wij π met E_2 % boven het honderd d.w.z. wij vermenigvuldigen π met $\frac{100}{100 + E_2}$. Wij houden dan over

$$p \times \frac{100 + E_1}{100} \times \frac{100}{100 + E_2}.$$

Ingevolge de compensatie-eis moet nu

$$p \times \frac{100 + E_1}{100} \times \frac{100}{100 + E_2} = p$$

waaruit $E_1 = E_2$ q.e.d.

Het belangrijkste hierin is niet in de eerste plaats, dat wij als voorwaarde voor vinden $E_1 = E_2$ (dit hebben wij nu al zo vaak gevonden), *maar dat wij vinden, dat als wij deze afleiding op grondslag van het tot nu toe ontwikkelde principe correct willen uitwerken, wij een vermeerdering van k_1 met 1 % van het honderd moeten vergelijken met een vermindering van k_2 met 1 % boven het honderd. M.a.w. een vermenigvuldiging van k_1 met $\frac{101}{100}$ moet in het product gecompenseerd worden met een vermenigvuldiging van k_2 met $\frac{100}{101}$ of algemeen : om tot een correcte afleiding te komen moeten wij de substitutie van de productiemiddelen zo doen plaats vinden dat zij in omgekeerde evenredigheid veranderen : in formule, wij moeten uitgaan van*

$$\boxed{k_1 \ k_2 = c.}$$

Nu is de graphische voorstelling van de functie $k_1 \ k_2 = c$ in de analytische meetkunde bekend als de orthogonale hyperbool op haar asymptoten als assen en dit is de curve, die in B I § 83 e.v. en B II §76 e.v. zulk een overheersende rol speelt.

Deze beschouwing geeft aanleiding tot een vraag en een paar opmerkingen. Zien wij eerst de vraag onder de ogen. In de boven geciteerde plaatsen in B I en B II is het invoeren van de orthogonale hyperbool gemotiveerd met de noodzakelijkheid om de gevolgen van een verandering in $\frac{k_1}{k_2}$ en een verandering in de bedrijfsgrootte gescheiden te houden. (Zie o.a. B I § 83 e.v.)

Om het verband tussen bovenstaande analyse en die uit BI en B II te vinden zullen wij dus aannemelijk moeten maken, dat de afleiding $k_1 \ k_2 = c$, zoals zij hierboven is geschied, wezenlijk overeenstemt met de theorie uit B I. De vraag is dus: kunnen wij aantonen, dat bovenstaande analyse, die leidt tot de nevenvoorwaarde $k_1 \ k_2 = c$ in werkelijkheid de voorwaarde behelst dat de bedrijfsgrootte onveranderd blijft. Het antwoord moet (in beknopte vorm) als volgt luiden: Uit het bovenstaande is gebleken dat als wij b.v. 1 % toename van k_1 compenseren door 1 % vermindering van k_2, wij een incorrectheid begaan. In werkelijkheid moeten wij $\frac{1}{100} k_1$ compenseren door $\frac{1}{101} k_2$.[25])

De correcte opzet is dus:

vervang $\frac{1}{101} k_2$ door $\frac{1}{100} k_1$.

De incorrecte daarentegen:

vervang $\frac{1}{100} k_2$ door $\frac{1}{100} k_1$.

De incorrectheid betekent dus dat wij $\frac{1}{100} k_2$ onttrekken, terwijl wij

---

[25]) Volledig geformuleerd: wij moeten zolang doorgaan met substituties van eenheden k_1 door eenheden k_2, totdat de toename, die een gevolg is van de toevoeging van $\frac{1}{100} k_1$ gecompenseerd wordt door de afname, die een gevolg is van de onttrekking van $\frac{1}{101} k_2$. Een zelfde formulering kan worden gegeven bij verwisseling van de woorden toenemen en afnemen.

$\frac{1}{101}k_2$ moeten onttrekken: d.w.z. wij onttrekken een te grote hoeveelheid k_2 d.w.z. *dat wij overgaan op een veranderde grootte van de bedrijfshuishouding.* En aangezien een verandering in de bedrijfsgrootte een afzonderlijke invloed uitoefent op de grootte van p moet deze verandering van de gevolgen van de verandering in de verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ worden geïsoleerd. Dit is dus, nu op zeer populaire wijze voorgesteld, de grondslag van mijn gehele betoog in B I en II en tevens het antwoord op de vraag, die wij hierboven stelden.

Nu volgen een paar opmerkingen, die het verband tussen bovenstaande populaire uiteenzetting en de wiskundige analyse uit de aangehaalde paragrafen uit B I en B II in een nog duidelijker licht plaatsen.

Volgens bovenstaande analyse substitueren wij k_1 door k_2 (of omgekeerd) door een punt te laten bewegen langs een orthogonale hyperbool (zie fig. 5).

Deze orthogonale hyperbool snijdt verschillende isoquanten (b.v. I_1 en I_2) en raakt er een (i.c. I_3). De hoeveelheid product neemt toe met de indices der isoquanten. Dus als wij ons langs de hyperbool bewegen d.w.z. bij constante bedrijfsgrootte de verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ laten veranderen, is de

$k_1k_2 = c$ (hyperbool)

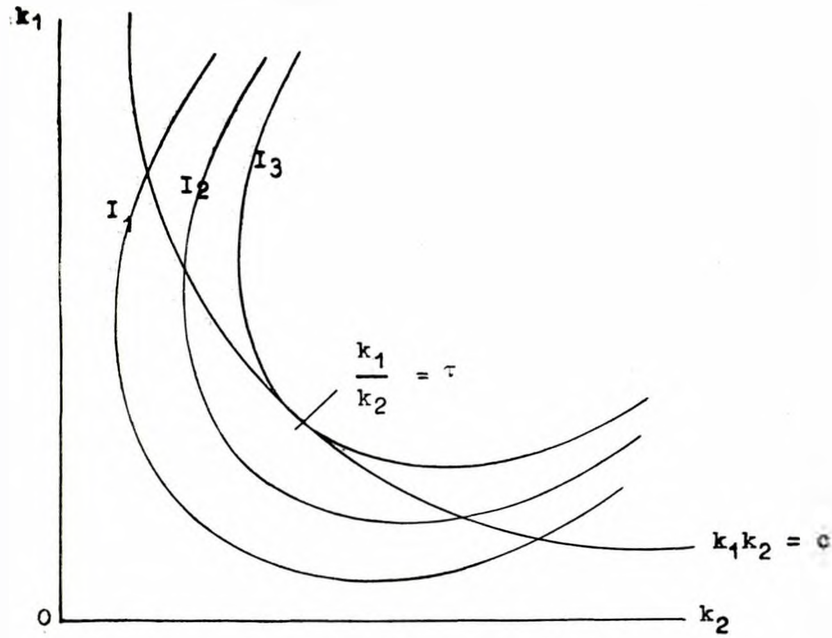

Fig. 5.

maximale productie bereikt waar de orthogonale hyperbool een isoquant raakt (zie fig. 5 bij $\frac{k_1}{k_2} = \tau$). Dit is de hierboven uitgewerkte verbale analyse in een meetkundige interpretatie (zie B II § 78).

Analytisch hebben wij hier de vraag naar een relatief extreem en wel

$$p = f(k_1, k_2) = \max$$

onder de voorwaarde, dat

$$(k_1 k_2) = c,$$ [26]

hetwelk te vinden is in B I § 85 e.v. en B II § 82 e.v.

Ik vlei mij met de gedachte, dat bovenstaande beschouwingen duidelijk de samenhang tussen de verschillende manieren, die ik in B I en B II heb gevolgd om τ te definiëren in het licht hebben gesteld en dat er bovendien uit gebleken is, dat hierbij geen enkel waardeoordeel is ingevoegd, zodat van een vermenging van technisch en economisch juiste proportionaliteit geen sprake is, maar dat daarentegen het punt voor τ wel degelijk relevant is in die zin, dat het de maximale materiële productie aangeeft voor zover die afhangt van de verhouding $\frac{k_1}{k_2}$ bij een standvastige bedrijfsgrootte. Ik breng de lezer in herinnering, dat deze uiteenzettingen ten doel hebben om na te gaan, waar de denkfout schuilt in de oppositie van *van der Schroeff*, omdat het tot dusverre geciteerde niet voldoende aanknopingspunten biedt om na te gaan hoe mijn opponent zijn beweringen motiveert. Wij zijn nu voldoende gewapend om zijn betoog verder met vrucht te kunnen analyseren.

Wij constateren dan dat *van der Schroeff*, klaarblijkelijk met voorbijgaan van al hetgeen ik hierover in B I en B II heb geschreven, toch half bewust op de orthogonale hyperbool als essentieel punt van mijn beschouwingen is gestuit. Zo lezen wij t.a.p. op pag. 29:

> „We tekenen onze isoquant en vinden het critisch punt dat aan „de voorwaarde van gelijke substitutie voldoet, critisch omdat er „boven de maximum- en er beneden de minimumpositie ligt. Het „punt laat zich bepalen aan de hand van de meetkundige eigen- „schap, dat de hoek die de raaklijn aan de isoquant op dat punt „met de abscis maakt gelijk is aan de hoek, die „de diagonaal door „de oorsprong en dat punt" met de abscis maakt".

Na deze opmerking komt dan op pag. 30 de beoordeling.

> „De bedenkingen liggen bij het uitgangspunt; de mathematische „uitwerking is correct. Prof. Kleerekoper's analyse gaat uit van „een quantitatieve verhouding, waarbij een substitutie-mogelijkheid „bestaat van relatief gelijke hoeveelheden van middelen, die uit een „oogpunt van technische proportionaliteit doelmatiger is dan een „verhouding, waarbij dit niet het geval is.
>
> „Maar wij vragen: waarom? Dit uitgangspunt is aprioristisch, het „wordt gesteld zonder bewijs.
>
> „Voorzover nochtans die uitspraak houdbaar zou zijn, zou alleen „de bewijsvoering te kort geschoten zijn".

En dan na enige herhaling volgt het boven aangehaalde citaat waaruit ik herhaal:

> „Alhoewel het punt *mathematisch exact* bepaald is (dit is juist „het misleidende!) is het punt in het kader van wat het wil voor-

---

[26]) Waaruit volgt:

$$\frac{\frac{dp}{dk_1}}{k_2} = \frac{\frac{dp}{dk_2}}{k_2}$$

$$\frac{k_1}{p}\,\frac{dp}{dk_1} = \frac{k_2}{p}\,\frac{dp}{dk_2}$$

$$E_1 = E_2$$

„stellen nog volmaakt willekeurig; het heeft geen critische beteke-
„nis".

Hierbij merk ik het volgende op.

De door mijn collega in het eerst medegedeelde citaat aangehaalde eigenschap is op een zeer gewichtig punt gebrekkig geformuleerd. Correct en algemeen geformuleerd luidt zij: wanneer men in een willekeurig punt van een orthogonale hyperbool op haar asymptoten als assen een raaklijn trekt, snijdt deze raaklijn van de abscis een stuk af, dat door de loodlijn uit het raakpunt op de abscis neergelaten in twee gelijke delen wordt verdeeld. [27]) Het punt van de isoquant, waarvoor de door *van der Schroeff* genoemde eigenschap geldt is n.l. *het raakpunt van de isoquant met de orthogonale hyperbool.* (Zie hierover nader B II § 78.)

En nu is het van het allergrootste belang om te weten, dat het punt op de isoquant dat ik voor τ aangaf juist het raakpunt met de orthogonale hyperbool is en juist dit punt is van der Schroeff ontgaan.

In dit artikel heb ik op de betekenis van de orthogonale hyperbool ($k_1 . k_2 = c$) nog eens uitvoerig gewezen, zodat dit op deze plaats niet nog eens opnieuw behoeft te geschieden. Bovendien wordt er uitvoerig over gesproken in B I § 74 (dat is dezelfde paragraaf waar *van der Schroeff* zijn critiek tegen richt), §§ 83, 84, 85, 86 en B II §§ 76, 77, 78, 79a, 80, 81, 82, 83, 85 en 86. Op het beslissende moment heeft mijn opponent in zijn formulering dus de orthogonale hyperbool uit het oog verloren en uitsluitend de isoquanten in zijn gedachten gehouden. Dusdoende heeft hij het essentiële der analyse over het hoofd gezien en slechts als wij dit bedenken is het begrijpelijk, dat hij beweert dat het punt (τ) „mathematisch exact" bepaald is, dat dit echter juist „misleidend" is „binnen het kader van wat het wil voorstellen nog volmaakt willekeurig" is en „geen critische betekenis" heeft. Al deze uitspraken negeren eenvoudig al hetgeen door mij ter adstructie van mijn standpunt is aangevoerd en dat *van der Schroeff* klaarblijkelijk ontgaan is.

En dat het uitgangspunt gesteld wordt „zonder bewijs" is evenzeer onjuist. En waarom de „bewijsvoering" (nu toch weer een bewijsvoering?) „te kort geschoten" zou zijn wordt ook niet duidelijk. Wellicht hoor ik dit nog wel bij het debat.

Ik zou het debat met mijn collega hier kunnen afbreken en overgaan tot mijn slotbeschouwing, nl. het onderzoek in hoeverre mijn analyse een voortzetting en bevestiging is van de opzet van *Limperg* — ware het niet, dat er in de beschouwingen van *van der Schroeff* nog een paar punten zijn, die ik niet onbehandeld kan laten.

1. Het afwijzend oordeel van mijn collega wordt anders wanneer men niet met twee variabelen, maar met een of meer constante factoren te doen heeft. Hij heeft n.l. eerst gesteld, dat „zolang wij waarde en prijs niet inschakelen" er „zich geen oordeel" laat geven „omtrent de gunstigste verhouding". „Deze conclusie moet anders luiden als we werken met een variabele, waarbij de andere factoren constant zijn" (pag. 32). Hoe komt hij hiertoe? Het antwoord vinden wij op dezelfde pagina. Hij onderzocht n.l. hoeveel eenheden van de productiefactor A men zal toevoegen als de hoeveelheid B gegeven is. En dan concludeert hij (pag. 32):

[27]) Deze eigenschap wordt in de wiskundige economie, voor zover mij bekend is, voor het eerst toegepast door Cournot (Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théories des Richesses, pag. 57) en werd door mij gerefereerd (met bewijs) in B II § 31 pag. 45/46.

„Men zal doorgaan met de toevoeging van A tot een volgende „hoeveelheid geen vergroting meer geeft van het resultaat".

Maar dat is niets anders, dan het weer opnieuw stellen van de oude norm van *Mill & Godley* besproken bij de behandeling van mijn stelling I, welke norm hierboven toch zeer geargumenteerd is teruggewezen en weer teruggevonden wordt in het boek van *Garver* en *Hansen*, welk boek hierboven door mij evenzeer op dit punt als zeer onvoldoende is gekenschetst.

Er is echter meer. Bij de analyse van de stelling van *Mill* en van *Garver* en *Hansen* is door mij aangetoond, dat deze stelling alleen zin heeft in het niét voorkomende geval dat de constante factor een vrij goed is d.w.z. dat de prijs ervan = 0 is. Maar dan heeft de gehele stelling betrekking op een economische proportionaliteit (τ') en niet op een technische! *Van der Schroeff* meent, dat ik langs een achterdeur toch een waardeoordeel in mijn analyse heb betrokken (zie bovenstaande citaten). Het omgekeerde is waar: niet ik heb dat gedaan, maar mijn opponent! En wel op een weinig bewuste wijze. Hij zegt (pag. 33):

„Het maximum van het resultaat ligt op de grens van de over„gang naar de technisch irrationele phase; deze grens ligt niet op „het moment, waar het resultaat absoluut afneemt, maar op het „moment, waarop differentieel beschouwd de toevoeging aan het „resultaat door vergroting van A nadert tot 0".

Hier zien wij dus de zo foutieve differentiële calculatie weer in optima forma ten tonele verschijnen. Op dit punt wil ik te dezer plaatse niet nader ingaan. Ik meen er in B I § 98 e.v. en B II § 106 e.v. in ander verband uitvoerig mede te hebben afgerekend. Maar de fout ligt hier anders dan bij *Garver*. Laten wij zien hoe. De differentiële calculatie staat op het standpunt dat de constante kosten *„overhead costs"* voorstellen en als zodanig niet behoeven te worden gecalculeerd; foutievelijk overigens. Maar in de norm van *van der Schroeff* ligt opgesloten, zoals wij bij de analyse van de stelling van *Mill* hebben aangetoond dat de waarde van de constante factor = 0 is. *Hierdoor komt van der Schroeff op deze plaats tot zijn differentiële beschouwingswijze.* Klaarblijkelijk heeft hij het verschil niet gezien tussen het *buiten beschouwing laten van alle prijzen* (zoals ik doe bij de bepaling van τ) *en het gelijk 0 stellen van één prijs!*

Ik wil dit punt afsluiten met de opmerking, dat de inhoud van mijn eerste twee stellingen, n.l. dat de economie sinds de dagen der grote klassieken op dit punt nog weinig vorderingen heeft gemaakt, door het hier behandelde voorbeeld wel duidelijk wordt geadstrueerd.

2. Ik kom nu tot mijn laatste opmerking omtrent de inzichten van mijn collega *van der Schroeff* omtrent deze materie.

Op pag. 42 lezen wij:

„Tot aanvulling van conclusie 4 (zoveel a aanwenden tot margi„naal product en gemiddeld product aan elkaar gelijk zijn) kan „worden gezegd, dat toevoeging van de factor a doelmatig is, in„dien het marginaal product gelijk is aan of kleiner dan het gemid„deld product" (Prof. v. d. Schroeff wijkt hier af van de literatuur!)

En verder heet het:

„Prof. v. d. Schroeff heeft eerst een verruiming te bieden aan het „isoquantenstelsel".

En dan concludeert de analyse:

„Hierin schuilt de moeilijkheid: hoe vinden wij P_2? Het is n.l. „het punt waar de isoquant naar binnen buigt, het moment waarop „voortgezette toevoeging tot vermindering van het resultaat gaat „leiden: op dit punt is b te veel en a te kort".

Ten aanzien van de eerste stelling meent *van der Schroeff* dat hij afwijkt van de literatuur. Maar in B I § 77 heb ik exact bewezen (en naar ik hoop is de exactheid hier geen misleiding):

„rationele productie is (dus) slechts mogelijk als voor beide pro„ductiemiddelen het grensproduct gelijk is aan of kleiner dan het „gemiddelde product".

En de verruiming, die door mijn collega geboden wordt ten aanzien van het isoquanten-stelsel is evenmin nieuw.
In een exacte analyse van B II § 73 lezen wij:

„De normale isoquante verloopt dalend naar rechts. Zij is con„vex naar beneden en van twee critische punten af verwijdert zij „zich van de coördinaten k_1 en k_2. Deze twee critische punten geven „het begin van de absolute overmaat posities aan".

Nu is een prioriteitsstrijd altijd onvruchtbaar. Bovendien had ieder ander vakman deze stellingen evengoed als ondergetekende kunnen vinden. En ik wil best geloven dat *van der Schroeff* zelf op deze gedachten gekomen is. Bovendien zou het mij niet verwonderen als zij ook elders — in mij onbekende werken — geformuleerd is. Ik zeide het reeds eerder: ook in de wetenschap geldt *qu'on n'est jamais le premier.*
Ik wil dus graag aannemen dat *van der Schroeff* zijn stellingen zelf gevonden heeft en geen kennis heeft genomen van de boven geciteerde B I § 77 en B II § 73. Maar dan moet mij één opmerking van het hart. Het uitbrengen van een zo scherp judicium als *van der Schroeff* blijkens het bovengeciteerde uitbrengt over een wetenschappelijk werk, waarvan hij op de meest essentiële punten geen kennis heeft genomen, geeft blijk van een gebrek aan zorgvuldigheid in het wetenschappelijke verkeer, dat nauwelijks betaamt. Hoewel ik de gehele behandeling van mijn werk door mijn collega dus wel onaardig vind, vind ik haar in zeker opzicht toch ook weer bepaald moedgevend: mocht mijn opponent er nog ooit toe komen om mijn theorie op dit punt volledig en grondig te bestuderen, dan zullen wij het misschien toch nog eens worden. De hier getoonde affiniteiten geven althans een reden om dit te mogen hopen.

Ik kom nu tot het slot van deze beschouwingen. Er rest mij nog slechts om aan te tonen, dat mijn analyse steunt op en een bevestiging geeft van het oorspronkelijke standpunt dat *Limperg* heeft ingenomen. Dit bewijs houdt een nadere motivering in van de vraag, waarom τ inderdaad een technisch juiste verhouding aangeeft en illustreert bovendien zeer helder, waarin dat „juiste" bestaat.
In B II § 73 lezen wij:

„Uit de voorgaande analyse volgt onmiddellijk, dat naarmate de „wet van de afnemende meeropbrengst sterker werkt de isoquante „steiler verloopt en omgekeerd".

De lezer herinnert zich nu dat τ ligt op het punt waar de isoquante een orthogonale hyperbool raakt (zie fig. 6)

Zeer klaarblijkelijk is τ dus het punt waar de isoquante het minst steil verloopt d.i. waar de wet van de afnemende meeropbrengst het minste invloed heeft. (zie uitgebreid hierover B II § 86).

Mij dunkt dat dit een voldoende reden is om het punt voor τ technisch „juist" te noemen. Nu is verder uit B I § 63 gebleken, dat in het geheel van onze theorie de afnemende meeropbrengst een reflex is van het verschijnsel van de „ongebruikte resten". Dus: τ geeft het punt waarop de wet van het ontstaan van „ongebruikte resten" minimaal werkt.

Limperg nu heeft als eerste eis voor de bepaling van de technisch juiste proportionaliteit gesteld: *Zoek die verhouding van de productiemiddelen, waarin de ongebruikte resten minimaal zijn.*

Het blijkt dus dat zijn visie de juiste geweest is. Alleen heeft hij de moeilijkheid van de ongelijksoortige eenheden niet opgelost, maar dit is bij een niet-wiskundige analyse dan ook onmogelijk. Mijn pretentie is geen andere dan een juiste visie van *Limperg* de wiskundige grondslag gegeven te hebben, die haar kan vrijwaren tegen ongemotiveerde critiek; in overeenstemming met hetgeen ik in het voorbericht van B I gesteld heb.

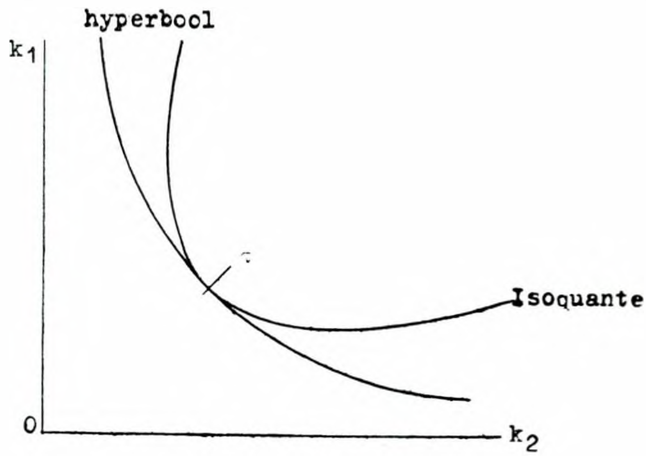

Fig. 6.

Ik meen, dat ik hiermede voldaan heb aan de gestelde opgave in de stellingen IV en V, die aan het hoofd van dit artikel geplaatst zijn. Bewezen is nogmaals, dat de door τ aangegeven quantitatieve verhoudingen inderdaad critisch zijn voor de beoordeling van de economisch-technische juistheid van de combinatie d.w.z. voor de economische rationaliteit van de combinatie, als wij de prijzen buiten beschouwing laten. En bovendien hebben wij een volkomen bevestiging gevonden van het uitgangspunt van *Limperg*.

Hiermede wil ik voor deze keer mijn beschouwingen eindigen.