VOORRAADBEHEERSING

door Drs. L. J. Postma en N. D. de Ridder

1. Aan het probleem der voorraadbeheersing wordt na het verschijnen van het proefschrift van A. M. Groot [1]) weer vrij veel aandacht geschonken.

Het betreft hier het vraagstuk van de minimalisering van bestel-(instel) en voorraadkosten. Voor de berekening hiervan is een formule ontwikkeld, die men, zij het dan in verschillende uitvoeringen, in de bedrijfseconomische literatuur veelvuldig tegenkomt. Wij zullen hier de formule weergeven zoals deze in het werk van A. M. Groot voorkomt. Het ligt in onze bedoeling aan deze formule een korte beschouwing te wijden, om dan vervolgens na te gaan of het probleem der voorraadbeheersing ook nog op andere wijze benaderd kan worden.

Door A. M. Groot wordt uitgegaan van de formule:

$$Np = \frac{vJ}{200N} \quad ^{2)} \qquad (1)$$

waarbij:

N = bestelfrequentie
J = jaarverbruik
p = ordervoorbereidingskosten per order
v = percentage voorraadkosten

Bovengenoemde 4 variabelen kunnen voor elk artikel verschillend zijn. Derhalve kan men bij meerdere artikelen ook uitgaan van de formule:

$$Y = \sum_{x=1}^{m} N_x p_x + \sum_{x=1}^{m} \frac{v_x J_x}{200 N_x} \qquad (2)$$

waarbij:

Y = totale variabele kosten
x = de artikelen 1 t/m m

Het is duidelijk, dat op grond van de differentiaalrekening, de gelijkheid genoemd in formule (1) een voldoende en noodzakelijke voorwaarde is voor de eis dat Y minimaal is.

Bij de variabelen p en v is echter geen onderscheid gemaakt tussen de vaste en variabele kosten. Willen wij dit onderscheid ook nog in de formule verwerken, dan zal deze er als volgt dienen uit te zien:

$$Y = a + \sum_{x=1}^{m} N_x p_x + b + \sum_{x=1}^{m} \frac{v_x J_x}{200 N_x} \qquad (3)$$

---

[1]) A. M. Groot, Voorraadbeheersing, Assortimentsbepaling en Conditiepolitiek, Diss. Amsterdam 1959.

[2]) Bij deze formule gelden een aantal vereenvoudige veronderstellingen, zoals:
- Verbruikstempo is constant
- betaling bij ontvangst der goederen
- de orderkosten zijn onafhankelijk van de grootte van de order.
- de aanvulling der goederen bereikt het magazijn als de voorraad nul is.

Tevens is afgezien van het gebruik van kwantum-kortingen, prijsveranderingen e.d. Voor een beschouwing hiervan verwijzen wij naar T. M. Whitin, Theory of Inventory Management, Princeton 1953, hoofdstuk III.

waarbij:

a = de vaste kosten verbonden aan het ordervoorbereiden.

b = de vaste kosten verbonden aan het houden van een voorraad.

Bovengenoemde onderscheiding tussen vaste en variabele kosten wordt in de literatuur meestal niet vermeld. Aanleiding hiervoor zou kunnen zijn dat a en b nul worden verondersteld; dit zou echter in strijd met de werkelijkheid zijn, behalve uiteraard wanneer men de formule (3) op zeer lange termijn zou beschouwen, daar op zeer lange termijn alle kosten variabel zijn. Indien de formule (3) op zeer lange termijn wordt bezien, dan is Y niet continu variabel en dan geldt dus de afleiding naar formule (1) niet.

Tegen het toepassen van de formules (1) (2) (3) bestaan echter bepaalde bezwaren.

Er wordt bij deze formules namelijk geen rekening gehouden met de bestaande vermogens-capaciteit, met de capaciteit van de ordervoorbereidingsafdeling en met de capaciteit van de magazijnen.

Men kan zich derhalve afvragen of het gebruik van de formules (1) (2) en (3) nog wel zoveel zin heeft. Want willen we rekening houden met bovengenoemde bezwaren, dan lopen wij de kans door de bomen het bos niet meer te zien.

Het voorraadprobleem is dan eigenlijk een niet-lineair programmeringsprobleem geworden, waarbij als restricties de ordervoorbereidingscapaciteit, de magazijncapaciteit en het beschikbare vermogen optreden.

Bij meerdere artikelen zal dit vraagstuk moeilijk op te lossen zijn.

2. Het vraagstuk van de optimale voorraad is echter ook op enigszins andere wijze te benaderen. [3]).

Dit is met het volgende voorbeeld te illustreren.

Zij gegeven dat de omzet van een bepaalde onderneming op zinvolle wijze in drie groepen te verdelen is. En wel in de groepen

A, B en C.

De omzet in deze groepen is respectievelijk *f* 50.000,—, *f* 220.000,— en *f* 1.100.000,—.

De aantallen verschillende artikelen in deze groepen zijn 100, 40 en 20.

Voorts zijn de percentages variabele kosten, verbonden aan het houden van voorraden, voor de drie groepen respectievelijk 10 %, 7 % en 6 %.

Dat hier van slechts drie groepen wordt uitgegaan, heeft geen andere betekenis, dan dat het gewenst is te achten voor de overzichtelijkheid van het voorbeeld, het aantal groepen te beperken. In de praktijk kan het aantal groepen veel groter zijn. Men zou zelfs zover kunnen gaan, dat men voor elk artikel een afzonderlijke groep maakt. Hoever men in de praktijk met de verdeling in groepen moet gaan, zal van geval tot geval moeten beoordeeld worden. In het algemeen is te stellen, dat een zeer grote verfijning door gebruik te maken van een groot aantal groepen weinig of geen invloed zal hebben op de te berekenen optimale bestelgrootte. Wel zal er naar moeten worden gestreefd, dat in de groepen geen artikelen worden

[3]) Zie hiervoor ook het artikel van J. Rogers in Management Science 1957, nr. 1.

samengevoegd, waarvan de percentages van de variabele voorraadkosten sterk uiteenlopen.

Voorlopig nemen we aan, dat het aantal orders, dat de betrokken onderneming per jaar kan verwerken, circa 500 is. Naderhand zal worden onderzocht wat de uitbreiding respectievelijk de inkrimping van deze ordercapaciteit voor de betrokken onderneming betekent. Indien wordt uitgegaan van een willekeurig gekozen bestelfrequentie voor de drie groepen van artikelen, dan is de volgende tabel op te stellen:

Tabel A.

groep	aant. art.	omzet	% variabele kosten	frequentie	vermogensbeslag	aantal orders	variabele kosten
	N	O	P	F	$\frac{O}{2F}$	FN	$\frac{OP}{200F} = K$
A	100	50.000	10	1	25.000	100	2.500
B	40	220.000	7	5	22.000	200	1.540
C	20	1.100.000	6	10	55.000	200	3.300
		1.370.000			102.000	500	7.340

Uitgaande van de willekeurig gekozen bestelfrequenties van respectievelijk 1, 5 en 10 wordt gevonden, dat de variabele kosten *f* 7.340,— zijn. Hierbij is uitgegaan van de veronderstelling dat een zodanige gelijkmatige verdeling in de tijd bestaat, dat de formule

$$\frac{\text{omzet}}{2 \times \text{bestelfrequentie}} = \frac{O}{2\,F}$$

een redelijke benadering van het vermogensbeslag door de voorraden weergeeft. Nagegaan dient te worden of dit vermogensbeslag binnen de grootte van het beschikbare vermogen blijft.

De vraag is nu te stellen hoe de bestelfrequenties gevonden worden, waarbij de totale variabele kosten zo laag mogelijk zijn. Om deze vraag te kunnen beantwoorden, voeren we een nieuwe grootheid D in.

Per definitie geldt: $D = \frac{OP}{200F^2N}$

Deze grootheid is een maatstaf voor de mate waarin de variabele kosten(K) veranderen indien de bestelfrequentie (F) veranderd. [4]) De grootheid D is dus niets anders dan K (de variabele kosten) gedeeld door F.N.

Samengevat in een tabel, leidt dit tot:

Tabel B.

groep	Aant. art. per groep	bestel frequentie	variabele kosten	D
	N	F	$K = \frac{OP}{200F}$	$\frac{OP}{200F^2N}$
A	100	1	2.500	25
B	40	5	1.540	7,7
C	20	10	3.300	16,5
	160		7.340	

Te bewijzen is, dat, indien de bestelfrequenties zo worden gekozen, dat de factoren D van de verschillende groepen gelijk zijn, de variabele kosten in totaal minimaal zijn.

Men zou nu door systematisch proberen, die frequenties kunnen opsporen, waarvoor geldt $D_A = D_B = D_C$ en men heeft dan het minimum gevonden. Te bewijzen valt ook dat de variabele kosten in het onderhavige geval minimaal zijn, indien de beschikbare ordercapaciteit wordt verdeeld in verhouding:

$$\sqrt{2500 \times 100} : \sqrt{7700 \times 40} : \sqrt{33000 \times 20}$$

De getallen 2500, 7700, 33000 stellen de variabele kosten voor van elke groep bij de bestelfrequentie één$\left(\frac{OP}{200}\right)$.

De getallen 100, 40 en 20 zijn de aantallen artikelen per groep (N).

Stellen we per definitie dat: $W_A = \sqrt{\frac{O_A P_A}{200} . N_A}$

dan is de bovenstaande verhouding
$W_A : W_B : W_C$.

---

[4]) Vermogensbeslag $\frac{O}{2F}$

Variabele voorraadkosten per artikelgroep $= \frac{P}{100} . \frac{O}{2F}$

Afgeleide (naar bestelfrequentie) van de variabele voorraadkosten per artikelgroep $= - \frac{P}{100} . \frac{O}{2F^2}$

Variabele voorraadkosten per artikel $= \frac{P}{100} . \frac{O}{2FN}$

Afgeleide (naar bestelfrequentie) van de variabele voorraadkosten per artikel $= - \frac{P}{100} . \frac{O}{2F^2N}$

Uit het bovenstaande blijkt dus, dat de variabele voorraadkosten per artikelgroep en per artikel zullen dalen als de bestelfrequentie groter wordt en dat zij zullen stijgen als de bestelfrequentie kleiner wordt. Met behulp van de tabellen B en C is dit gemakkelijk te verifieren. Wiskundig is D dus negatief. In ons voorbeeld is dat echter van geen belang. Met behulp van de tabellen B en C kan men dit zonder veel moeite vaststellen. Derhalve hebben wij gesteld $D = \frac{P}{100} . \frac{O}{2F^2N}$

In het gegeven geval zijn de waarden van W_A, W_B en W_C respectievelijk 500, 555 en 812.

De verdeling van de aangenomen ordercapaciteit ad 500, leidt tot 134 orders voor groep A, 148 orders voor groep B en 218 orders voor groep C.

Samengevat in tabelvorm leidt dit tot:

Tabel C:

groep	aantal artikelen per groep	bestel frequentie	variabele kosten	D
	N	F	$K = \frac{OP}{200F}$	$\frac{OP}{200F^2N}$
A	100	134/100	1.866	14
B	40	148/40	2.081	14
C	20	218/20	3.028	14
			6.975	

Bij deze tabel is nog het volgende te vermelden. De bestelfrequenties zijn gevonden door W_A, W_B en W_C te berekenen en vervolgens het op basis hiervan vastgestelde aantal orders van groep A, B en C door respectievelijk N_A, N_B en N_C te delen.

Daarna werd K berekend door de variabele kosten bij de bestelfrequentie 1 te delen door resp. F_A, F_B en F_C en ten slotte werd met behulp van K, D_A, D_B en D_C bepaald.

De berekening van D_A, D_B en D_C biedt door de omstandigheid dat D_A, D_B en D_C gelijk moeten zijn, de mogelijkheid voor controle op de berekening en op het bereiken van het minimum. Verder valt op te merken, dat W_A, W_B en W_C onafhankelijk zijn van de gekozen ordercapaciteit.

Het bovengesteld probleem is dus eigenlijk in een aantal stappen opgelost. De oplossing is gebaseerd op de multiplicatoren methode van Lagrange.

3. De totale variabele voorraadkosten zijn nog op een andere wijze te berekenen, te bewijzen is n.l. dat

$$\sum_{j=a}^{c} K_j = \frac{(W_A + W_B + W_C)^2}{M}$$

Hierin stelt M de ordercapaciteit voor.

$$\Sigma K = \frac{(500 + 555 + 812)^2}{500} = \frac{3485.600}{500} = f\ 6.970,\text{—}$$

Door afrondingen is een verschil ontstaan in het minst significante cijfer.

De laatstgenoemde formule biedt de mogelijkheid om, indien voor een bepaalde ordercapaciteit (M) de totale kosten voor het optimale geval zijn berekend, deze ook te berekenen voor een aantal andere waarden van M.

Door in dit geval voor M b.v. achtereenvolgens 400, 500, 600, 700 en 800 te nemen, worden de totale variabele voorraadkosten berekend bij een ordercapaciteit van 400, 500, 600, 700 en 800.

Dit leidt tot de volgende tabel:

Tabel D.

Order-capaciteit (M)	Totale variabele voorraadkosten
400 orders	*f* 8.714
500 „	„ 6.970
600 „	„ 5.809
700 „	„ 4.979
800 „	„ 4.357

$$\frac{(\Sigma W)^2}{M} = \frac{3485.600}{M}$$

Om de vraag te kunnen beantwoorden, welke ordercapaciteit gekozen moet worden, dienen in eerste instantie, de variabele voorraadkosten vergeleken te worden met de orderkosten. Het is mogelijk dat de kosten verbonden aan de behandeling van de orders een analytische functie vormen, zoals de hiervoor gedefinieerde variabele voorraadkosten. Is dit het geval, dan is een oplossing langs analytische weg ook mogelijk. Men kan echter veilig aannemen, dat het in de meeste gevallen niet zo zal zijn, dat de orderkosten, in het gehele te onderzoeken gebied één differentieerbare functie vormen en het is daarom raadzaam de oplossing niet langs analytische weg, doch langs de weg van tabel-vergelijking te zoeken.

Men moet om hiertoe te kunnen komen een berekening maken van de totale kosten verbonden aan het behandelen van de orders bij een capaciteit van resp. 400, 500, 600, 700 en 800 orders.

We nemen nu aan dat dit leidt tot de volgende tabel.

Tabel E

Ordercapaciteit M	Totale variabele voorraadkosten I	Totale orderkosten II	(I + II)
400 orders	*f* 8.714	*f* 6.000	*f* 14.714
500 „	„ 6.970	„ 6.500	„ 13.470
600 „	„ 5.809	„ 7.500	„ 13.309
700 „	„ 4.979	„ 8.500	„ 13.479
800 „	„ 4.357	„ 12.000	„ 16.357

Het min of meer gunstige verloop van de orderkosten heeft tot gevolg, dat hier bij ca. 600 orders een theoretisch minimum optreedt, maar dat praktisch het gehele gebied tussen 500 en 700 orders als minimaal is te beschouwen.

Dit is een voordeel van de bovenstaande methode t.o.v. de methode waarbij men voor elk artikel één punt berekend; men krijgt met behulp van de tabellen een inzicht in het totaal en in het verloop van de relevante factoren. Ten slotte zal men in de overwegingen welke ordercapaciteit gewenst is, ook dat deel van de magazijnkosten moeten betrekken, dat bij de eerste berekening niet als „variabel" is aangemerkt.

Hierbij valt nog aan te tekenen, dat een onderscheid moet worden gemaakt tussen overwegingen op korte termijn en overwegingen op lange termijn. De kosten welke met het bewaren van de goederen in het magazijn samenhangen en welke in eerste instantie niet tot de variabele kosten behoren, zullen veelal op lange termijn wel variabel zijn.

Ook ten aanzien van de niet „variabele" voorraadkosten geldt dat het verloop van deze kosten in vrijwel alle gevallen niet op exacte wijze met een eenvoudige analytische functie is te benaderen. Dat de voorkomende discontinuïteiten in een aantal niet voorzienbare gevallen bij toepassing van een eenvoudige analytische methode tot verkeerde conclusies moet leiden is evident. En de weg om met meer gecompliceerde modellen te gaan werken zal in praktisch de meerderheid van de gevallen wel omslachtiger zijn, dan de methode van tabelvergelijking.

Indien alle kosten in aanmerking worden genomen, dan ontstaat de volgende tabel:

Tabel F

Order-capaciteit	Totale variabele voorraadkosten	Totale orderkosten	Totale overige voorraadkosten	(I) + (II) + (III)
M	(I)	(II)	(III)	
400 orders	*f* 8.714	*f* 6.000	*f* 3.000	*f* 17.714
500 „	„ 6.970	„ 6.500	„ 3.000	„ 16.470
600 „	„ 5.809	„ 7.500	„ 3.000	„ 16.309
700 „	„ 4.979	„ 8.500	„ 3.000	„ 16.479
800 „	„ 4.357	„ 12.000	„ 2.000	„ 18.357

Van de totale overige voorraadkosten is hier aangenomen, dat deze kosten eerst bij 800 orders zullen verminderen. Deze aanname is uiteraard volkomen willekeurig, maar gezien de aard van deze kosten, zij bestaan o.a. uit afschrijvingen en rente van duurzame bedrijfsmiddelen (pakhuis), is praktisch altijd met een dergelijke sprongfunctie te rekenen. Bovendien zullen veelal de consequenties van deze sprongfuncties alleen over langere tijd gerealiseerd kunnen worden, hetgeen tot gevolg heeft, dat de kolom III verschillend kan zijn voor beslissingen op kortere termijn en voor beslissingen op langere termijn.

4. Het bovenstaande heeft ons tot de conclusie gebracht, dat, zowel de methode van het afzonderlijk toepassen van de analytische formule $\sqrt{\frac{vJ}{200p}}$ (Groot), als de bovengenoemde methode, waarbij ten dele analytisch, ten dele met tabellen wordt gewerkt, vergaande vereenvoudige modellen betekenen van een in wezen zeer gecompliceerd vraagstuk. Indien men echter deze simplificatie kan en wil toepassen, dan is de door ons voorgestelde methode te verkiezen boven de analytische formule voor elk afzonderlijk artikel:

a) omdat geen geweld wordt aangedaan aan economisch of mathematisch te stellen eisen aan de vorm van de berekening (buiten beschouwing laten van discontinuïteiten).
b) omdat hierbij het totaal verband tussen verschillende grootheden in 2 tabellen wordt vastgelegd (n.l. tabel C aangevuld met omzet en vermogensbeslag en tabel F).
c) omdat zij door de tabelvorm beter toegankelijk is voor belanghebbenden.

In de appendix is zeer summier het wiskundig verband waarop de verschillende stellingen berusten aangegeven.

Gegeven

$F\ (F_1, F_2, F_3);\ G\ (F_1, F_2, F_3) = 0$

$$F\ (F_1, F_2, F_3) = \frac{O_1P_1}{200F_1} + \frac{O_2P_2}{200F_2} + \frac{O_3P_3}{200F_3} \quad (1)$$

$$G(F_1, F_2, F_3) = N_1F_1 + N_2F_2 + N_3F_3 - M = 0 \quad (2)$$

Gevraagd

$F\ (F_1F_2F_3)$ minimaal

onder de nevenvoorwaarde $G\ (F_1F_2F_3) = 0$

Toepassing multiplicatoren methode van Lagrange leidt

$$\frac{O_1P_1}{200F_1^2} = \lambda\ N_1 \quad (3)$$

$$\frac{O_2P_2}{200F_2^2} = \lambda\ N_2 \quad (4)$$

$$\frac{O_3P_3}{200F_3^2} = \lambda\ N_3 \quad (5)$$

Oplossing van de vergelijkingen (2) (3) (4) en (5) leidt tot die waarden van F_1, F_2 en F_3, waarvoor $F\ (F_1F_2F_3)$ stationnair en in dit geval minimaal is.

De oplossing geeft:

$$F_j = \frac{M\sqrt{\frac{O_jP_j}{200N_j}}}{\sqrt{\frac{N_1O_1P_1}{200}} + \sqrt{\frac{N_2O_2P_2}{200}} + \sqrt{\frac{N_3O_3P_3}{200}}}$$

Dan is:

$$D_j = \frac{O_jP_j}{200F^2{}_jN_j}; \qquad D_j = \frac{\left\{\sqrt{\frac{N_1O_1P_1}{200}} + \sqrt{\frac{N_2O_2P_2}{200}} + \sqrt{\frac{N_3O_3P_3}{200}}\right\}^2}{M^2}$$

$$F_jN_j = M.\frac{\sqrt{\frac{N_jO_jP_j}{200}}}{\sqrt{\frac{N_1O_1P_1}{200}} + \sqrt{\frac{N_2O_2P_2}{200}} + \sqrt{\frac{N_3O_3P_3}{200}}}$$

$$K_j = \frac{O_jP_j}{200F_j}; \qquad K_j = \frac{\left\{\sqrt{\frac{N_1O_1P_1}{200}} + \sqrt{\frac{N_2O_2P_2}{200}} + \sqrt{\frac{N_3O_3P_3}{200}}\right\}.\sqrt{\frac{N_jO_jP_j}{200}}}{M}$$

$$\Sigma K_j = \frac{\left\{\sqrt{\frac{N_1O_1P_1}{200}} + \sqrt{\frac{N_2O_2P_2}{200}} + \sqrt{\frac{N_3O_3P_3}{200}}\right\}^2}{M}$$

waarmede het gestelde bewezen is.